

SAMER ALSOSO
ELECTRONICS ENGINEER

بنك الأسئلة لوحدة الاحتمالات

3- $n(A \cup B) = 10$, $n(A) = 5$, $n(B) = 5$

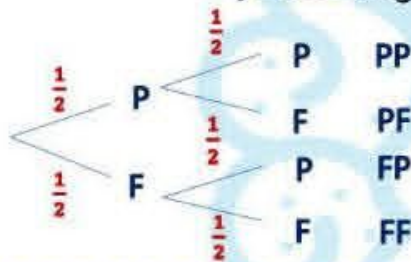
$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 5 - 0 = 10$$

$$n(\bar{A}) = 5, n(E) = 10, n(A) = 5$$

$$n(E) - n(A) = 10 - 5 = 5$$

2- نقلتي قطعتين نقود متميزتين نرسم إلى أحد الوجوه بالرمز P والوجه الآخر بالرمز F والمطلوب :
1- ما هو عدد الاحتمالات الممكنة .

$$n = 2^2 = 4$$



3- أكتب فضاء العينة للتجربة السابقة .

$$E = \{PP, PF, FP, FF\}$$

4- ما هو احتمال ظهور P و F معاً .

$$P(PF) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

5- باعتبار القطعتين غير متميزتين ما هو عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة وما هو احتمال ظهور P و F في هذه الحالة وما هو احتمال ظهور P P .

بما أن القطعتين غير متميزتين فإن الاحتمالين PF و FP هما احتمال واحد وبالتالي يكون فضاء العينة:

$$E = \{PP, FP, FF\} \Rightarrow n = 3$$

حيث الاحتمالين PF و FP هما احتمال واحد وبالتالي

$$P(PF) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

الاحتمال P P يظهر مرة واحدة والاحتمالات غير متساوية

$$P(PP) = \frac{1}{4}$$

1- ليكن لدينا المجموعة التالية :

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ليكن لدينا A مجموعة الأعداد الزوجية و B مجموعة الأعداد الفردية و C مجموعة مضاعفات العدد 3 والمطلوب :

1- أوجد احتمال ما يلي : $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$.

2- أكتب عناصر مجموعة واحتمالات المجموعات التالية :

$$A \cap B, A \cup B, A \cap C, A \cup C, B \cap C, B \cup C, \bar{A}, \overline{A \cup C}$$

3- نرسم إلى عدد عناصر المجموعة $n(A)$ بعدد عناصر المجموعة A ونفس الشيء لبقية المجموعات أثبت أن:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(\bar{A}) = n(E) - n(A)$$

الحل :

$$1- A = \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow p(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow p(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{0, 3, 6, 9\} \Rightarrow p(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$2- A \cap B = \{\emptyset\} \Rightarrow p(A \cap B) = 0$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow p(A \cup B) = 1$$

$$A \cap C = \{0, 6\} \Rightarrow p(A \cap C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$A \cup C = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow p(A \cup C) = \frac{7}{10}$$

$$B \cap C = \{3, 9\} \Rightarrow p(B \cap C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$B \cup C = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

$$\Rightarrow p(B \cup C) = \frac{7}{10}$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow p(\bar{A}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{A \cup C} = \{1, 5, 7\} \Rightarrow p(\overline{A \cup C}) = \frac{3}{10}$$

5- يوجد في صندوق خمسة كرات مرقمة من 1 إلى 5 نسحب تباعاً ثلاث كرات مع إعادة ونسجل رقم كل كرة مسحوبة بالترتيب لنحصل على رقم مؤلف من ثلاث أرقام ليست بالضرورة مختلفة عن بعضها والمطلوب:

1- ما هو عدد الحالات الممكنة لملئ الخانة الثلاث.

حيث نسحب كرة ونعيدها وبالتالي يبقى عدد الكرات ثابتاً :

خانة 1 خانة 2 خانة 3

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline \end{array} \Rightarrow n = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

2- ما هو احتمال الكرة الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4.

حيث الخانة الثانية هي 4 احتمالها هو 1 والسحب مع إعادة وبالتالي يتبقى 5 احتمالات لكل خانة وبالتالي يكون لدينا :

$$n = 5 \times 1 \times 5 = 25 \Rightarrow P(A) = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$$

3- ما هو احتمال أن يكون الرقم المشكل رقم زوجي.

يكون الرقم زوجي إذا كان أحاده رقم زوجي وفي مثالنا يوجد رقمين هما 2 و 4 أي الأحاد له احتمالين والتجربة مع إعادة وبالتالي العشرات والمئات لهما 5 احتمالات أي:

$$n = 2 \times 5 \times 5 = 50 \Rightarrow P(A) = \frac{50}{125} = \frac{2}{5}$$

6- يوجد في صندوق خمسة كرات مرقمة من 1 إلى 5 نسحب تباعاً ثلاث كرات دون إعادة ونسجل رقم كل كرة مسحوبة بالترتيب لنحصل على رقم مؤلف من ثلاث أرقام ليست بالضرورة مختلفة عن بعضها والمطلوب:

1- ما هو عدد الحالات الممكنة لملئ الخانات الثلاث.

حيث نسحب كرة ولا نعيدها وبالتالي عدد الكرات يقل:

خانة 1 خانة 2 خانة 3

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \Rightarrow n = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

2- ما هو احتمال الكرة الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4.

حيث الخانة الثانية هي 4 احتمالها هو 1 والسحب دون إعادة وبالتالي تقل احتمالات لكل خانة وبالتالي يكون لدينا :

$$n = 4 \times 1 \times 3 = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

3- ما هو احتمال أن يكون الرقم المشكل رقم فردي.

يكون الرقم فردي إذا كان أحاده رقم فردي وفي مثالنا يوجد ثلاث أرقام هم 1 و 3 و 5 أي الأحاد له ثلاثة احتمالات والتجربة دون إعادة وبالتالي تقل الاحتمالات لكل خانة أي :

$$n = 3 \times 4 \times 3 = 36 \Rightarrow P(B) = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

3- نلقي نردتين مثاليين ومتمايزين ما هو عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة وفي حال كان النردين غير متمايزين ما هو عدد الحالات في هذه الحالة .

$$n = 6^2 = 36 \text{ الحالة الأولى :}$$

الحالة الثانية : بما أن النردين غير متمايزين فإن الحالات التي يكون فيها النردين متماثلين أي:

$$(1,1)(2,2)(3,3) \dots \Rightarrow n_1 = 6$$

والحالات التي يكون فيها النردين مختلفين مثلاً (1,2) هو نفسه (2,1) وبالتالي يكون لدينا عدد حالات هذه الحالة :

$$E = \{12,13,14,15,16,23,24,25,26,34,35,36,45,46,56\}$$

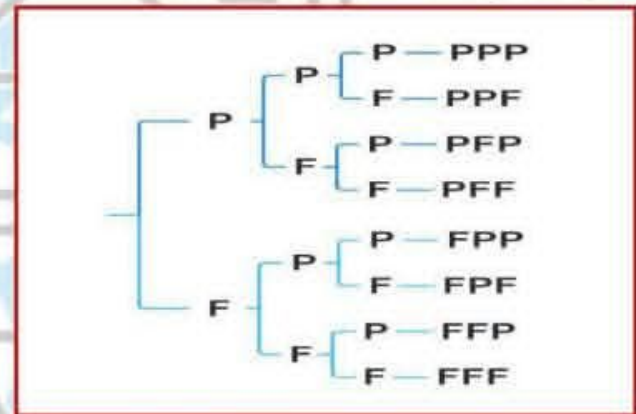
$$n_2 = 15 \Rightarrow n = 6 + 15 = 21$$

4- نلقي ثلاث قطع من النقود المتمايزة نرسم إلى أحد الوجوه بالرمز P والوجه الآخر بالرمز F والمطلوب :

1- ما هو عدد الاحتمالات الممكنة .

$$n = 2^3 = 8$$

2- أوجد شجرة الاحتمالات .



3- أكتب فضاء العينة للتجربة السابقة .

$$E = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

4- ما هو احتمال ظهور F مرتين فقط.

$$P(FF) = \frac{3}{8}$$

5- ما هو احتمال ظهور P مرة فقط.

$$P(P) = \frac{3}{8}$$

6- ما هو احتمال ظهور PFF مرة فقط

$$P(PFF) = \frac{1}{8}$$

7- باعتبار القطع غير متمايزة ما هو عدد الحالات الممكنة

في هذه الحالة وما هو احتمال ظهور PFF .

$$E = \{PPP, PPF, FFP, FFF\} \Rightarrow n = 4$$

الاحتمالات غير متساوية وبالتالي يكون لدينا :

$$P(FFF) = \frac{3}{8}$$

1- الاحتمالات الممكنة :

$$E = \{ PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF \}$$

- احتمال خسارة ثلاث ليرة عندما : $\{ PPP \}$

$$P(X = -3) = \frac{1}{8}$$

- احتمال خسارة ليرة عندما : $\{ PPF, PFP, FPP \}$

$$P(X = -1) = \frac{3}{8}$$

- احتمال ربح ليرة عندما : $\{ PFF, FPF, FFP \}$

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

- احتمال ربح ثلاث ليرة عندما : $\{ FFF \}$

$$P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

2- قانون الاحتمال X :

الربح X	-3	-1	1	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3- حساب التوقع الرياضي :

$$E(X) = -3\left(\frac{1}{8}\right) - 1\left(\frac{3}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$E(X) = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0$$

9- ليكن $E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \}$ والاحتمالات متساوية وليكن X المتحول العشوائي المعرف عليها كما يلي :

$$X(e_1) = X(e_3) = -3, X(e_2) = X(e_4) = 0, X(e_5) = 1$$

- 1- أوجد مجموعة قيم X .

- 2- أوجد الاحتمالات التالية :

$$P(X = -3), P(X = 0), P(X = 1)$$

- 1- مجموعة قيم X : $\{-3, 0, 1\}$

$$P(X = -3) = \frac{2}{5}, P(X = 0) = \frac{2}{5}, P(X = 1) = \frac{1}{5}$$

10- في لعبة إلقاء نرد مثالي تقتضي اللعبة بربح ليرتين في حال كان الرقم الظاهر هو 1 ويربح ليرة إذا ظهر الرقم 2 وخسارة ليرة في حال ظهور بقية الأرقام وليكن K التابع الذي يقرن بكل نتيجة ربح أو خسارة والمطلوب :

- 1- أوجد احتمال كل نتيجة .

$$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

- احتمال خسارة ليرة عندما : $\{ 3, 4, 5, 6 \}$

$$P(X = -1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- احتمال ربح ليرة عندما : $\{ 2 \}$

- احتمال ربح ليرتان عندما : $\{ 1 \}$

$$P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

7- يحوي صندوق 40 كرة مرقمة من 10 إلى 49 نسحب عشوائياً كرة ونسجل الرقم الكرة والمطلوب حساب احتمالات الأحداث التالية :

الحادث A : أحاد الرقم يساوي 1 .

الحادث B : عشرات العدد رقم زوجي .

الحادث C : أحاد العدد يساوي الواحد أو عشرات زوجية .

الحادث D : أحاد العدد لا يساوي الواحد وعشرات فردية .

$$A = \{ 11, 21, 31, 41 \} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

2- الحادث B عندما يكون عشرات العدد رقم زوجي وبالتالي يوجد 20 عنصر (20, 21 → 40, 41, ...) $\Rightarrow P(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

3- الحادث C أحاد العدد يساوي 1 أو عشرات زوجية أي

اجتماع الحدين A و B أي : $P(C) = P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الحادث $A \cap B$ هو تقاطع الحدين A و B أي العدد أحاده 1 وعشرات زوجية أي :

$$A \cap B = \{ 21, 41 \} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{40} + \frac{20}{40} - \frac{2}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

طريقة ثانية : من خلال إيجاد المجموعة الموافقة للحادث C حيث تحتوي على جميع عناصر المجموعة B بالإضافة إلى عنصرين هما 11 و 31 وبالتالي أصبح لدينا 22 عنصر أي :

$$P(C) = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

4- الحادث D وهو حدث معاكس للحادث C حيث أن الحادث D هو أحاد العدد لا يساوي الواحد وعشرات فردية أي :

$$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{20}{20} - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

طريقة ثانية : من خلال إيجاد المجموعة الموافقة للحادث D حيث تحتوي على الأعداد من 10 إلى 19 ما عدا 11 ومن العدد 30 إلى 39 ما عدا 31 أي 18 عنصر :

$$P(D) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

8- نلقي ثلاث قطع من النقود متوازية مرقمة 1 و 2 و 3 ونسجل الوجه الظاهر لكل قطعة نختار مجموعة النتائج الممكنة فضاء لهذه التجربة تقتضي اللعبة بربح ليرة كلما ظهر الوجه F وخسارة ليرة كلما ظهر الوجه P التابع X الذي يقرن بكل نتيجة ربح أو خسارة والمطلوب :

- 1- أوجد احتمال كل نتيجة .

- 2- أوجد قانون احتمال X .

- 3- أوجد التوقع الرياضي . $E(X)$

5- ما هو احتمال الحصول على عدد أكبر من 50 .
يكون العدد أكبر من 50 عندما يكون العشرات 5 أو 6 حيث
العشرات محدّد بالنرد الأزرق أما الأحاد لا يؤثر على التجربة
وله 6 احتمالات وبالتالي يكون لدينا :

$$n = 2 \times 6 = 12 \Rightarrow P(D) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

6- ما هو احتمال الحصول على عدد له رقم مكرر.
يكون العدد مكرر عندما يكون لدينا النردين بهما نفس الرقم أي
{ 11, 22, 33, 44, 55, 66 }

$$n = 6 \Rightarrow P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

7- ما هو احتمال الحصول على عدد له مربع كامل.
يكون العدد له مربع كامل عند الاحتمالات التالية :

$$\{ 16, 25, 36, 49 \}$$

$$n = 4 \Rightarrow P(F) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

8- ما هو احتمال الحصول على عدد أولي .
تكون الأعداد أولية الموافق للتجربة :

$$\{ 11, 13, 23, 31, 41, 43, 53, 61 \}$$

$$n = 8 \Rightarrow P(G) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

13- لدينا نرد غير مثالي نعلم مسبقاً أن احتمال ظهور
الأرقام 2, 3, 4, 5 متساوية وأن احتمال ظهور 6 هو
نصف احتمال ظهور أحد الاحتمالات السابقة واحتمال ظهور
1 هو $\frac{1}{2}$ والمطلوب :

1- أكتب علاقة الاحتمالات السابقة واحسب كل احتمال .

2- اكتب القانون الاحتمال X المرفقة على E .

3- احسب التوقع الرياضي .

1- نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوي 1 ولنفرض أن احتمال
الأرقام من 2 إلى 5 هو x يكون لدينا حسب النص :

$$p_6 = \frac{1}{2}x, p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = x, p_1 = \frac{1}{2}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} + x + x + x + x + \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + 4x + \frac{1}{2}x = 1$$

$$+\frac{9}{2}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{9}$$

$$p_6 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

2- أوجد قانون احتمال K .

الربح K	-1	1	2
$P(X = K)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3- أوجد التوقع الرياضي $E(X)$.

$$E(X) = -1\left(\frac{2}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$E(X) = -\frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}$$

11- نلقي نرداً مكعباً فيه وجه يحمل الرقم 1 ووجهان
يحملان الرقم 2 وبقيّة الوجوه يحملون الرقم 3 والمطلوب :

1- ما هو فضاء العينة للتجربة .

$$E = \{ 1, 2, 2, 3, 3, 3 \}$$

2- ما هو عدد الاحتمالات الممكنة للتجربة .

$$n = \{ 1, 2, 3 \} = 3$$

3- ما هو احتمال ظهور كل رقم من الأرقام .

$$P(1) = \frac{1}{6}, P(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

12- نلقي نردتين : الأولى أزرق والثاني أحمر نسجل العدد
الذي يتكون من النحر التالي : يحدّد رقم الأحاد على الوجه
العلوي للنرد الأحمر ورقم العشرات بالوجه العلوي للنرد
الأزرق والمطلوب :

1- ما هو عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة .

$$n = 6^2 = 36$$

2- ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي .

للحصول على عدد زوجي يجب أن يكون الأحاد رقم زوجي
ورقم الأحاد محدّد بالنرد الأحمر حيث النرد مرقم من 1 إلى

6 وبالتالي لدينا 2 و 4 و 6 أي الأحاد ثلاث احتمالات

العشرات لا يؤثر على المطلوب ومحدّد بالنرد الأزرق
وبالتالي له 6 احتمالات وبالتالي يكون لدينا :

$$n = 3 \times 6 = 18 \Rightarrow P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

3- ما هو احتمال الحصول على عدد فردي .

$$P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4- ما هو احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 5 .

يقبل العدد القسمة على 5 إذا كان أحاده 0 أو 5 وهنا لا يوجد
0 لأن النرد يبدأ من 1 وهنا النرد الأحمر للأحاد أي يوجد

احتمال واحد للأحاد أما العشرات لا تؤثر على التجربة أي له
6 احتمالات وبالتالي يكون لدينا :

$$n = 1 \times 6 = 6 \Rightarrow P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

17- يحوي صندوق سبع كرات ثلاث منها سوداء ومرقمة من 1 إلى 3 وأربعة حمراء مرقمة من 1 إلى 4 نسحب عشوائياً كرة من الصندوق والمطلوب:

1- حساب الاحتمالات للأحداث التالية:

الحادث A : الكرة المسحوبة سوداء .

الحادث B : الكرة المسحوبة حمراء .

الحادث C : الكرة المسحوبة تحمل رقم زوجي .

فضاء العينة : $E = \{B1, B2, B3, R1, R2, R3, R4\}$

$$P(A) = \frac{3}{7}, P(B) = \frac{4}{7}, P(C) = \frac{3}{7}$$

2- حساب الاحتمالات التالية:

$$A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cup B, A \cup C, B \cup C$$

1- $A \cap B$: هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء وسوداء في نفس الوقت هذا الحدث مستحيل أي :

$$P(A \cap B) = 0$$

2- $A \cap C$: هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء ونور رقم زوجي في نفس الوقت أي $\{B2\}$:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{7}$$

3- $B \cap C$: هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء ونور رقم زوجي في نفس الوقت أي $\{R2, R4\}$:

$$P(B \cap C) = \frac{2}{7}$$

4- $A \cup B$: هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو سوداء أي $\{B1, B2, B3, R1, R2, R3, R4\}$:

$$P(A \cup B) = \frac{7}{7} = 1$$

طريقة ثانية : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} - 0 = \frac{7}{7} = 1$$

5- $A \cup C$: هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو زوجية أي $\{B2, R1, R2, R3, R4\}$:

$$P(A \cup C) = \frac{5}{7}$$

طريقة ثانية : $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$

$$P(A \cup C) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

6- $B \cup C$: هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء أو زوجية أي $\{B1, B2, B3, R2, R4\}$:

$$P(B \cup C) = \frac{5}{7}$$

طريقة ثانية : $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$$P(B \cup C) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

2- قانون احتمال x :

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

3- التوقع الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{9}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right) + 4\left(\frac{1}{9}\right) + 5\left(\frac{1}{9}\right) + 6\left(\frac{1}{18}\right)$$

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{14}{9} + \frac{6}{18} = \frac{33}{18}$$

14- نلقي نرداً على شكل رباعي وجوه منتظم وجوهره مرقمة من 1 إلى 4 نسجل الرقم المخفي من النرد والمطلوب :

1- أوجد احتمال كل رقم .

2- أوجد قانون الاحتمال X لهذه التجربة .

3- أحسب التوقع الرياضي $E(X)$.

1- الاحتمالات جميعها متساوية لأن النرد مثالي أي :

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{4}$$

2- قانون احتمال x :

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3- التوقع الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$E(X) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

15- تحمل وجوه نرد مثالي مكعب الأرقام التالية :

1, 1, 1, 2, 2, 3 نلقي النرد مرة واحدة ونتأمل الأحداث التالية: الحادث A : الرقم الظاهر هو 1 والحادث B : الرقم الظاهر هو 2 والحادث C : هو الرقم الظاهر مختلف عن 3 والمطلوب إيجاد الاحتمالات للأحداث السابقة .

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{5}{6}$$

16- في تجربة عشوائية لدينا الحداث A و B يحققان التالي

$$P(\bar{A}) = 0.44, P(\bar{B}) = 0.63$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.32$$

والمطلوب حساب :

$$P(A) = 1 - 0.44 = 0.56$$

$$P(B) = 1 - 0.63 = 0.37$$

$$P(A \cup B) = 1 - 0.32 = 0.68$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = 0.56 + 0.37 - 0.68 = 0.25$$

1- عدد الحالات الممكنة : $n = 6^2 = 36$

2- القيم E' التي يأخذها المتحول S :

المتحول S هو مجموع X و Y حيث تتراوح القيم من 1 إلى 6 لكل متحول وبالتالي أقل قيمة عندما $X = 1, Y = 1$ هي 2 وأكبر قيمة عندما $X = 6, Y = 6$ هي 12 وبقيّة القيم تكون مجموع المتحولين لكل حالة وبالتالي تتراوح القيم من 2 إلى 12 وتكون المجموعة :

$$E' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

3- قيم الجدول :

الترد الأسود	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6	
	الترد الأحمر						

4- قانون الاحتمال S : بملاحظة الجدول السابق يمكن تعيين احتمال كل ناتج كما يلي حيث الأرقام باللون الأزرق فقط

$$P(S = 2) = \frac{1}{36}, P(S = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(S = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, P(S = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(S = 6) = \frac{5}{36}, P(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(S = 8) = \frac{5}{36}, P(S = 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(S = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, P(S = 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(S = 12) = \frac{1}{36}$$

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(S)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

بملاحظة الجدول السابق يكون المجموع الأكثر احتمال هو 7 واحتماله $\frac{6}{36}$.

5- التوقع الرياضي : $E(S) = \frac{1}{36}(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 35 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) = 7$

وهي طريقة طويلة يمكن حساب بطريقة أخرى عن طريق حساب توقع كل من X و Y حيث التوقع هو مجموع الاحتمالات على عددها ومن ثم جمعها أي :

$$E(x) = E(Y) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$E(S) = E(x) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = 7$$

18- نزود المجموعة التالية بقانون الاحتمال المنظم P :

$$E = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

لكن X المتحول العشوائي المعروف على E والذي يقرن كل عدد مع مربعه والمطلوب :

1- أوجد قانون الاحتمال X .

2- أوجد التوقع الرياضي $E(X)$.

1- حيث عدد الحالات الممكنة لدينا هو 9 ويتم حساب قيم

$$X \text{ حسب النص من العلاقة : } X = e^2$$

$$X(-4) = X(4) = 4^2 = 16 \Rightarrow P(X = 16) = \frac{2}{9}$$

$$X(-3) = X(3) = 3^2 = 9 \Rightarrow P(X = 9) = \frac{2}{9}$$

$$X(-2) = X(2) = 2^2 = 4 \Rightarrow P(X = 4) = \frac{2}{9}$$

$$X(-1) = X(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow P(X = 1) = \frac{2}{9}$$

$$X(0) = 0^2 = 0 \Rightarrow P(X = 0) = \frac{1}{9}$$

X	0	1	4	9	16
$P(X = x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

2- التوقع الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{9}\right) + 1\left(\frac{2}{9}\right) + 4\left(\frac{2}{9}\right) + 9\left(\frac{2}{9}\right) + 16\left(\frac{2}{9}\right)$$

$$E(X) = \frac{2}{9} + \frac{8}{9} + \frac{18}{9} + \frac{32}{9} = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$$

19- يعطى الجدول التالي قانون احتمال المتحول X :

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	0.15	0.20	0.25		0.15	0.05

1- أوجد الاحتمال $P(X = 4)$:

نعلم أن مجموع الاحتمالات تساوي ال 1 أي :

$$0.15 + 0.20 + 0.25 + p_4 + 0.15 + 0.05 = 1$$

$$P_4 = 1 - 0.8 = 0.2$$

20- نلقي نردتين مثاليتين الأولى أحمر والثاني أسود فضاء

التجربة هو مجموعة الثنائيات (x, y) مع $1 \leq x \leq 6$ و $1 \leq y \leq 6$ نزود E بقانون الاحتمال المنظم P ونتأمل

التابع S المعروف على E والذي يقرن بكل ثنائية (x, y) العدد $x + y$ والمطلوب :

1- عدد الحالات الممكنة .

2- حدد مجموعة القيم E' التي يأخذها المتحول S .

3- أملأ الجدول مبياً صورة كل ثنائية من E وفق S .

4- حدد قانون احتمال S وما المجموع الأكثر احتمالاً .

5- أحسب التوقع الرياضي $E(S)$.

21- يحوي صندوق على 6 كرات ثلاث منها حمراء وثلاث منها سوداء وتونسحب من الصندوق ثلاث كرات في نفس الوقت ونسجل ألوانهم ويرمز X إلى متحول عشوائي الذي يربط كل عملة سحب بعدد الكرات الحمراء التي نحصل عليها فيه والمطلوب:

1- عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة .

2- حدد قانون الاحتمال X .

3- أحسب التوقع الرياضي .

1- عدد الحالات الممكنة :

تكون حالة 3 كرات حمراء هو : $n(3R, 0B) = 1$

تكون حالة 2 كرات حمراء وكرة سوداء حيث يوجد 3

حالات لكل خيار وبالتالي : $n(2R, 1B) = 3 \times 3 = 9$

تكون حالة 2 كرات سوداء وكرة حمراء حيث يوجد 3

حالات لكل خيار وبالتالي : $n(1R, 2B) = 3 \times 3 = 9$

تكون حالة 3 كرات حمراء هو $n(3B, 0R) = 1$

$$n = 1 + 9 + 9 + 1 = 20$$

2- قانون احتمال X المرتبط بعدد الكرات الحمراء.

$$P(X = 3R) = \frac{1}{20}, P(X = 2R) = \frac{9}{20}$$

$$P(X = 1R) = \frac{9}{20}, P(X = 0R) = \frac{1}{20}$$

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

3- التوقع الرياضي $E(X)$.

$$E(X) = 0 \left(\frac{1}{20} \right) + 1 \left(\frac{9}{20} \right) + 2 \left(\frac{9}{20} \right) + 3 \left(\frac{1}{20} \right)$$

$$E(X) = 0 + \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

22- يصنف الدم البشري إلى أربعة زمر منفصلة وهي :

A و B و AB و O وأي تكن الزمرة إما أن تملك عامل تراس نرمله بالرمز Rh^+ أو لا تملك عامل تراس نرملها بالرمز Rh^- من بين سكان إحدى البلاد يوجد 40% منهم زمرة A و 10% منهم زمرة B و 5% منهم زمرة AB و 45% منهم زمرة O وبين الجدول نسب عامل التراس

	A	B	AB	O
Rh^+	82%	81%	83%	80%
Rh^-	18%	19%	17%	20%

نقول عن شخص زمرة الدموية O وعامل التراس له Rh^- أنه متبرع مطلق ونختار شخص عشوائياً والمطلوب :

1- متبرع مطلق .

2- عامله سلبي .

1- يكون المتبرع مطلق عندما تكون زمرة O سالبة أي :

$$P(O \cap Rh^-) = 0.2 \times 0.45 = 0.09 = 9\%$$

2- العامل سلبي : لحساب عدد الأشخاص الذين زمرة مهم

سلبية نضرب نسبة العامل السلبي لكل لكل زمرة بنسبتها ونقوم بجمعهم أي :

$$P(Rh^-) = 0.18 \times 0.40 + 0.1 \times 0.19 + 0.17 \times 0.05 + 0.2 \times 0.45 = 0.189 = 18.9\%$$

23- في تجربة عشوائية لدينا الحدثان A و B يحققان التالي

$$P(A) = 0.8, P(B) = 0.45$$

$$P(A \cup B) = 0.9$$

والمطلوب حساب : $P(\bar{A})$ و $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

$$P(\bar{A}) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = 0.8 + 0.45 - 0.9 = 0.35$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.35 = 0.65$$

24 - يحوي كيس على 7 كرات أربعة منها حمراء اللون وثلاثة سوداء اللون لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائياً كرة واحدة ونسجل لونها والمطلوب :

1- ما احتمال أن تكون الكرة حمراء اللون .

2- ما احتمال أن تكون الكرة سوداء اللون .

• نقوم بترقيم الكرات الحمراء من 1 إلى 4 والسوداء من 2 إلى 4 ونسحب كرة عشوائياً من الكيس والمطلوب :

3- أحسب احتمال سحب كرة تحمل رقم فردي .

4- أحسب احتمال كرة تحوي رقم زوجي .

1- يكون فضاء العينة في الحالة الأولى :

$$E_1 = \{R, R, R, R, B, B, B\}$$

وبالتالي يكون احتمال الكرة الحمراء : $P(A) = \frac{4}{7}$

2- احتمال الكرة السوداء : $P(B) = \frac{3}{7}$

3- فضاء العينة في الحالة الثانية :

$$E_1 = \{R_1, R_2, R_3, R_4, B_2, B_3, B_4\}$$

احتمال سحب كرة تحمل رقم فردي : $P(C) = \frac{3}{7}$

4- احتمال كرة تحوي رقم زوجي :

$$P(D) = \frac{4}{7}$$

1- الربح الممكن هو: $X = \{1, 3, 10\}$

2- يوجد لدينا 17 كرة وبالتالي يكون لدينا:

$$P(X = 1) = \frac{10}{17}, P(X = 3) = \frac{4}{17}, P(X = 10) = \frac{3}{17}$$

X	1	3	10
$P(X = x)$	$\frac{10}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{3}{17}$

3- التوقع الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 1 \left(\frac{10}{17} \right) + 3 \left(\frac{4}{17} \right) + 10 \left(\frac{3}{17} \right)$$

$$E(X) = \frac{10}{17} + \frac{12}{17} + \frac{30}{17} = \frac{52}{17}$$

27- يرمي لاعب زهري نرد متوازيين على شكر رباعي أوجه

كل منهما تحمل الأرقام من 1 إلى 4 ليكن x المتحول العشوائي

المعرف كما يلي: إذا كان مجموع الرقمين الظاهريين زوجي

يربح نفس مجموع الرقمين إذا كان مجموع الرقمين عدد فردياً

يخسر مجموع الرقمين والمطلوب:

1- عين قيم المتحول العشوائي X .

2- عرف قانون الإحتمال للمتغير.

1- لمعرفة قيم X نرسم الجدول التالي:

		نرد 2			
		1	2	3	4
نرد 1	1	+2	-3	+4	-5
	2	-3	+4	-5	+6
	3	+4	-5	+6	-7
	4	-5	+6	-7	+8

نلاحظ من الجدول تكون قيم المتحول X :

$$X = \{-7, -5, -3, +2, +4, +6, +8\}$$

2- قانون الإحتمال للمتغير: حيث عدد الحالات الممكنة

للتجربة هي $n = 4^2 = 16$ ومن الجدول السابق نأخذ

تكرار كل نتيجة وبالتالي:

x	-7	-5	-3	2	4	6	8
$P(x)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

25- ثلاث أكياس متماثلة كل منها تحوي 6 كرات متماثلة

الكيس U_1 يحوي: كرتين بيضاويتين و 4 كرات حمراء.

الكيس U_2 يحوي: 3 بيضاء و 3 حمراء.

الكيس U_3 يحوي: 5 بيضاء و 1 كرة حمراء. والمطلوب:

1- أوجد شجرة الاحتمالات.

2- ما احتمال سحب كرة بيضاء من U_3 .

3- ما احتمال سحب كرة بيضاء.

1- شجرة الاحتمالات: حيث وضعت الاحتمالات على المسار

حسب نص التجربة.



2- احتمال سحب كرة بيضاء من U_3 :

من مخطط الشجرة نتبع المسار المطلوب مع ضرب كل

مسار باحتماله أي: $\frac{1}{3} \rightarrow U_3 \rightarrow 5/6 \rightarrow B$

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

وبالتالي يكون الاحتمال:

3- احتمال سحب كرة بيضاء: هنا لدينا ثلاث مسارات

للوصول إلى الكرة البيضاء وبالتالي يكون الاحتمال

المطلوب هو مجموع الاحتمالات للمسارات الثلاث:

المسار الأول: $\frac{1}{3} \rightarrow U_1 \rightarrow 2/6 \rightarrow B$

المسار الثاني: $\frac{1}{3} \rightarrow U_2 \rightarrow 3/6 \rightarrow B$

المسار الثاني: $\frac{1}{3} \rightarrow U_3 \rightarrow 5/6 \rightarrow B$

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

26- يحوي كيس على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء و 10

كرات سوداء لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائياً كرة فيربح

الساحب ليرة في كان الكرة سوداء و 3 ليرات في حال كانت

الكرة حمراء و 10 ليرات في حال كانت الكرة بيضاء نعرف

المتغير X الذي يأخذ قيمة الربح المحتملة في اللعبة والمطلوب

1- عين قيمة المتحول X .

2- قانون الاحتمال للمتغير X .

3- حساب التوقع الرياضي $E(X)$.

سؤال دورة 2024 الثانية : د

يحتوي صندوق 30 كرة مرقمة من 1 إلى 40 نُسحب عشوائياً كرة ونقرأ رقمها ما احتمال أن يكون رقمها عدداً أحاده 1 .

الحل :

عدد الأرقام التي أحادها واحد ضمن مجال الأعداد هي 3 بالتالي يكون لدينا الاحتمال :

$$P(A) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

28- الجدول التالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية :

x	-2	-1	a	3
$P(X = x)$	0.12	0.5	b	0.3

والمطلوب تعيين قيمة a و b عندما يكون التوقع الرياضي

$$E(X) = 0.32$$

الحل : أولاً نحسب قيمة b حيث نعلم أن مجموع الاحتمالات تساوي الواحد أي :

$$0.12 + 0.5 + b + 0.3 = 1$$

$$b = 1 - 0.12 - 0.5 - 0.3 = 1 - 0.92 = 0.08$$

نحسب a من قانون التوقع الرياضي :

$$E(X) = -2(0.12) - 1(0.5) + 0.08(a) + 0.3(3)$$

$$0.32 = -0.24 - 0.5 + 0.08a + 0.9$$

$$0.08a = 0.32 + 0.24 + 0.5 - 0.9 = 0.16$$

$$a = \frac{0.16}{0.08} = 2$$

29- يحتوي صندوق 50 كرة مرقمة من 1 إلى 50 نُسحب كرة عشوائياً والمطلوب :

1- ما احتمال الكرة المسحوبة من مضاعفات الخمسة .

2- ما احتمال الكرة المسحوبة ليست من مضاعفات 3 .

1- عدد مضاعفات 5 هو : $n = \frac{50}{5} = 10$

$$P(A) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

2- الكرة المسحوبة ليست من مضاعفات 3 نحسب احتمال مضاعفات 3 ومن ثم نأخذ الحدث المتمم أي :

$$n = \frac{48}{3} = 15 \Rightarrow P(B) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{10}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

سؤال دورة 2024 الأولى :

يحتوي صندوق 100 كرة مرقمة من 1 إلى 100 نُسحب عشوائياً كرة ونقرأ رقمها ما احتمال أن يكون رقمها فردياً .

الحل :

عدد الأرقام الفردية ضمن مجال الأعداد هي 50 بالتالي يكون لدينا الاحتمال :

$$P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$