

SAMER ALSOSO
ELECTRONICS ENGINEER

التابع الكسري التناظري والوضع النسبي لخطين بيانين

4- بين نوع التابع التالي : $f(x) = \frac{3x+3}{2x+2}$

لدينا : $a = 3, b = 3, c = 2, d = 2$

$$ad - bc = 3(2) - (2)(3) = 6 - 6 = 0$$

$$ad - bc = 0 \Rightarrow$$

للتابع قيمة ثابتة ويمثل مستقيم يوازي محور الفواصل ما عدا قيمة التي تعدم المقام وتكون معادلته :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{3}{2}$$

وتكون قيمة التي تعدم المقام :

$$2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

5- بين نوع التابع التالي : $f(x) = \frac{-2x-1}{2x+1}$

لدينا : $a = -2, b = -1, c = 2, d = 1$

$$ad - bc = -2(1) - (2)(-1) = -2 + 2 = 0$$

$$ad - bc = 0 \Rightarrow$$

للتابع قيمة ثابتة ويمثل مستقيم يوازي محور الفواصل ما عدا قيمة التي تعدم المقام وتكون معادلته :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{-2}{2} = -1$$

وتكون قيمة التي تعدم المقام :

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

6- بين نوع التابع التالي : $f(x) = \frac{3}{x}$

لدينا : $a = 0, b = 3, c = 1, d = 0$

$$ad - bc = 0(0) - (3)(1) = 0 - 3 = -3$$

$$ad - bc \neq 0 \Rightarrow \text{التابع كسري تناظري}$$

مجموعة التعريف والمستقيمات المقاربة :

1- مجموعة التعريف : هي كل R ما عدا القيم التي

تعدم المقام . $I = R \setminus \{\text{القيم التي تعدم المقام}\}$

2- المقاربات الشاقولية والأفقية :

المقارب الأفقي أو الموازي لمحور الفواصل : $y = \frac{a}{c}$

المقارب الشاقولي أو الموازي لمحور الترتاب : $x = -\frac{d}{c}$

تكون نقطة التناظر : (x, y)

• **التابع الكسري التناظري :** يكون التابع الكسري

التناظري من الشكل : $f(X) = \frac{ax+b}{cx+d}$

ويجب أن يحقق الشرطين التاليين :

$$1- c \neq 0$$

$$2- ad - bc \neq 0$$

لدينا بعض الحالات الخاصة :

1- حيث في حال كان لدينا $c = 0$ و $a \neq 0$ يكون

التابع تابع صحيح من الدرجة الأولى يمثل مستقيم

$$\text{مائل ميله } m = \frac{a}{d}$$

2- في حالة $ad - bc = 0$ للتابع قيمة ثابتة ويمثل

مستقيم يوازي محور الفواصل ما عدا قيمة التي تعدم

$$\text{المقام وتكون معادلة المستقيم : } y = \frac{a}{c}$$

أمثلة :

1- بين نوع التابع التالي : $f(x) = \frac{2x+5}{3x+4}$

لدينا : $a = 2, b = 5, c = 3, d = 4$

$$ad - bc = 2(4) - (3)(5) = 8 - 15 = -7$$

$$ad - bc \neq 0 \Rightarrow \text{التابع كسري تناظري}$$

2- بين نوع التابع التالي : $f(x) = \frac{-3x+2}{-x-3}$

لدينا : $a = -3, b = 2, c = -1, d = -3$

$$ad - bc = -3(-3) - (-1)(2) = 9 + 2 = 11$$

$$ad - bc \neq 0 \Rightarrow \text{التابع كسري تناظري}$$

3- بين نوع التابع التالي : $f(x) = \frac{2x+4}{3}$

لدينا : $a = 2, b = 4, c = 0, d = 3$

بما أن $a = 2 \neq 0, c = 0$ يكون التابع تابع صحيح

من الدرجة الأولى يمثل مستقيم مائل ميله $m = \frac{a}{d}$

$$m = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$5- f(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$$

مجموعة التعريف: $3x+2=0 \Rightarrow 3x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

$$D = R \setminus \left[-\frac{2}{3}\right] \Rightarrow D =]-\infty -\frac{2}{3} [\cup]-\frac{2}{3} +\infty [$$

المقاربات :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \quad \text{المقارب الأفقي :}$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-(-2)}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \quad \text{المقارب الشاقولي :}$$

$$\text{نقطة التناظر : } \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

• في حال كان لدينا أحد المستقيمات المقاربة والمطلوب تعيين قيمة أحد الثوابت a و b و c و d كما يلي :

أمثلة :

1- ليكن a عدد حقيقي غير معدوم وليكن لدينا التابع

$$f(x) = \frac{x+1}{ax+2}$$

إذا علمت أن معادلة المقارب الأفقي هو $y = 2$

أوجد قيمة a . (سؤال امتحان الفصل الأول)

$$y = \frac{a}{c} = 2 \Rightarrow \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

2- ليكن a عدد حقيقي غير معدوم وليكن لدينا التابع

$$f(x) = \frac{ax+5}{-3x+2}$$

إذا علمت أن معادلة المقارب الأفقي هي $y = -4$

أوجد قيمة a .

$$y = \frac{a}{c} = -4 \Rightarrow \frac{a}{-3} = -4 \Rightarrow a = 12$$

3- ليكن a عدد حقيقي غير معدوم وليكن لدينا التابع

$$f(x) = \frac{-2x+3}{ax-1}$$

إذا علمت أن معادلة المقارب الشاقولي هي $x = -1$

أوجد قيمة a .

$$x = \frac{-d}{c} = -1 \Rightarrow \frac{-(-1)}{a} = -1 \Rightarrow a = \frac{+1}{-1} = -1$$

4- ليكن a عدد حقيقي غير معدوم وليكن لدينا التابع

$$f(x) = \frac{-2x+3}{3x+a}$$

إذا علمت أن معادلة المقارب الشاقولي هي $x = -\frac{2}{3}$

أوجد قيمة a .

$$x = \frac{-d}{c} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-(a)}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow -3a = -6$$

$$\Rightarrow a = \frac{-6}{-3} \Rightarrow a = 2$$

أمثلة : أوجد مجموعة التعريف والمستقيمات المقاربة ونقاط التناظر للتتابع التالية :

$$1- f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$$

مجموعة التعريف : $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$$D = R \setminus [2] \Rightarrow D =]-\infty 2 [\cup]2 +\infty [$$

المقاربات :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 3 \quad \text{المقارب الأفقي :}$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-(-2)}{1} \Rightarrow x = 2 \quad \text{المقارب الشاقولي :}$$

$$\text{نقطة التناظر : } (2, 3)$$

$$2- f(x) = \frac{3}{x}$$

مجموعة التعريف : $x=0$

$$D = R \setminus [0] \Rightarrow D =]-\infty 0 [\cup]0 +\infty [$$

المقاربات :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{0}{1} \Rightarrow y = 0 \quad \text{المقارب الأفقي :}$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-(0)}{1} \Rightarrow x = 0 \quad \text{المقارب الشاقولي :}$$

$$\text{نقطة التناظر : } (0, 0)$$

$$3- f(x) = \frac{3}{x-2} + 1$$

نقوم بتوحيد المقامات ومن ثم نوجد مجموعة التعريف والمقاربات كما يلي :

$$f(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{x-2} + \frac{x-2}{x-2} = \frac{x+1}{x-2}$$

مجموعة التعريف : $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$$D = R \setminus [2] \Rightarrow D =]-\infty 2 [\cup]2 +\infty [$$

المقاربات :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} \Rightarrow y = 1 \quad \text{المقارب الأفقي :}$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-(-2)}{1} \Rightarrow x = 2 \quad \text{المقارب الشاقولي :}$$

$$\text{نقطة التناظر : } (2, 1)$$

$$4- f(x) = \frac{3}{x-5} - 2$$

نقوم بتوحيد المقامات ومن ثم نوجد مجموعة التعريف والمقاربات كما يلي :

$$f(x) = \frac{3}{x-5} - \frac{2}{1} = \frac{3}{x-5} + \frac{-2x+10}{x-5} = \frac{-2x+13}{x-5}$$

مجموعة التعريف : $x-5=0 \Rightarrow x=5$

$$D = R \setminus [5] \Rightarrow D =]-\infty 5 [\cup]5 +\infty [$$

المقاربات :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{-2}{1} \Rightarrow y = -2 \quad \text{المقارب الأفقي :}$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-(-5)}{1} \Rightarrow x = 5 \quad \text{المقارب الشاقولي :}$$

$$\text{نقطة التناظر : } (5, -2)$$

• إذا كان المطلوب نقاط التقاطع مع محاور الإحداثيات :

1- التقاطع مع محور الفواصل : نعوض قيمة $y = 0$ ونوجد قيمة x وتكون النقطة $(x, 0)$.

2- التقاطع مع محاور الترتيب : نعوض قيمة $x = 0$ ونوجد قيمة y وتكون النقطة $(0, y)$.

ليس من الضروري أن يكون لدينا نقاط تقاطع مع المحاور في بعض الحالات لا يوجد نقاط تقاطع لإحدى المحاورين وسنشاهد ذلك في الأمثلة إذا كان الطلب نقاط التقاطع مع محاور الإحداثيات نوجد نقاط تقاطع المحاورين أما إذا حدد المحور تنقيده بالمحور المطلوب أي إما محور الترتيب أو محور الفواصل ولا داعي لحساب النقطتين .

أمثلة :

1- ليكن لدينا التابع التالي أوجد نقاط التقاطع مع محاور

$$f(x) = \frac{2x+4}{x+1} \quad \text{الإحداثيات :}$$

التقاطع مع محور الترتيب أي نعوض $x = 0$ ونوجد قيمة y كما يلي :

$$y = \frac{2(0)+4}{0+1} = \frac{4}{1} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0, 4)$$

التقاطع مع محور الفواصل نعوض $y = 0$ ونوجد قيمة x أي :

$$\frac{2x+4}{x+1} = 0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x = -\frac{4}{2}$$

$$x = -2 \Rightarrow (-2, 0)$$

حيث أي كسر يساوي الصفر نأخذ بسطه ونجعله صفر ونوجد القيمة وكما ذكرنا سابقا إذا كان الطلب إيجاد إحدى المحاورين فقط نتقيد بنقطة الموافقة للمحور.

2- ليكن لدينا التابع التالي أوجد نقاط التقاطع مع محاور

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{الإحداثيات :}$$

التقاطع مع محور الترتيب أي نعوض $x = 0$ ونوجد قيمة y لكن هنا التابع غير معرف عند الصفر

لأن الصفر تجعل المقام معدوم وبالتالي لا يوجد نقاط تقاطع مع محور الترتيب .

التقاطع مع محور الفواصل نعوض $y = 0$ ونوجد قيمة x أي :

$$\frac{x+1}{x} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$$

3- ليكن لدينا التابع التالي أوجد نقاط التقاطع مع محاور

$$f(x) = \frac{6}{x+3} \quad \text{الإحداثيات :}$$

التقاطع مع محور الترتيب أي نعوض $x = 0$

$$y = \frac{6}{0+3} = \frac{6}{3} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

التقاطع مع محور الفواصل نعوض $y = 0$ ونوجد قيمة x لكن البسط لا يحوي x وبالتالي لا يمكن أن تكون قيمة التابع صفر أي لا يمكن أن تكون $y = 0$ وبالتالي لا يوجد نقاط تقاطع مع محور الفواصل .

5- ليكن a عدد حقيقي غير معدوم وليكن لدينا التابع

$$f(x) = \frac{x-3}{ax+4}$$

إذا علمت أن التابع معرف على $D = R \setminus [-2]$ أوجد قيمة a .

نعلم أن القيمة التي تعدم المقام هي مقارب شاقولي وبالتالي يكون لدينا :

$$x = \frac{-a}{c} = -2 \Rightarrow \frac{-(4)}{a} = -2 \Rightarrow -2a = -4 \\ \Rightarrow a = \frac{-4}{-2} \Rightarrow a = 2$$

ملاحظة : يمكن أن يكون الخيار شكل التابع الكلي

وبالتالي نعوض قيمة الثابت في التابع أي :

$$F(x) = \frac{x-3}{2x+4}$$

6- ليكن a و b عدنان حقيقيان غير معدومان وليكن

لدينا التابع كسري تناظري : $f(x) = \frac{ax-3}{x+b}$

إذا علمت أن للتابع نقطة تناظر $(-3, 2)$ أوجد قيمة a و b .
نعلم أن نقطة التناظر هي نقطة تقاطع المقاربين وبالتالي يكون لدينا :

$$x = \frac{-a}{c} = -3 \Rightarrow \frac{-(b)}{1} = -3 \Rightarrow -b = -3$$

$$\Rightarrow b = \frac{-3}{-1} \Rightarrow b = 3$$

$$y = \frac{a}{c} = 2 \Rightarrow \frac{a}{1} = 2 \Rightarrow a = 2$$

7- ليكن a عدد حقيقي غير معدوم وليكن

لدينا التابع : $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$

عين قيمة a ليمر التابع بالنقطة $(1, 2)$.

بما أن التابع يمر بالنقطة وبالتالي النقطة تحقق التابع أي نعوض قيمة x و y للنقطة في التابع ونوجد الثابت a كما يلي :

$$(1, 2) \Rightarrow 2 = \frac{a(1)+1}{1+2} \Rightarrow 2 = \frac{a+1}{3} \Rightarrow 6 = a+1$$

$$a = 6 - 1 \Rightarrow a = 5$$

8- ليكن a عدد حقيقي غير معدوم وليكن

لدينا التابع : $f(x) = \frac{x+a}{x+2}$

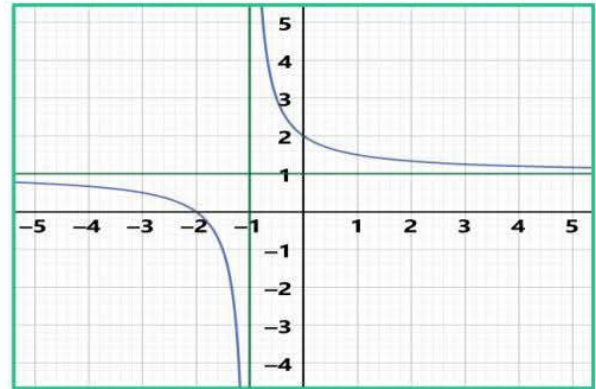
عين قيمة a ليمر التابع بالنقطة $(-1, 3)$.

$$(-1, 3) \Rightarrow 3 = \frac{-1+a}{-1+2} \Rightarrow 3 = \frac{a-1}{1} \Rightarrow$$

$$3 = a - 1 \Rightarrow a = 4$$

سؤال عن قراءة الخط البياني :

1- ليكن لدينا الخط البياني الموضح بالشكل :



المطلوب الإجابة عن لأسئلة التالية:

1- ما هي مجموعة تعريف التابع .

من الشكل نلاحظ أن التابع يبدأ من $-\infty$ إلى المقارب الشاقولي 1- حيث لا يوجد قيمة عند هذا المقارب وبالتالي التابع غير معرف عند هذا المقارب ومن ثم يكمل التابع من بعد 1- إلى $+\infty$ وبالتالي تكون مجموعة التعريف:

$$D =] - \infty - 1[\cup] - 1 + \infty [$$

2- أوجد معادلة المقاربين للتابع السابق.

المقارب الشاقولي: $x = -1$ المقارب الأفقي: $y = 1$

3- أوجد نقطة التناظر للتابع السابق .

نقطة التناظر هي نقطة تقاطع المقاربين أي : $(-1, 1)$

4- أوجد نقاط التقاطع مع محاور الإحداثيات .

التقاطع مع محور الفواصل أي عندما $y = 0$ نجد: $(-2, 0)$ التقاطع مع محور الترتيب أي عندما $x = 0$ نجد: $(0, 2)$ 5- أوجد حل المتراجحة : $f(x) \geq 0$

المتراجحة أكبر أو يساوي الصفر أي القيم الموجبة مع قيمة الصفر أي قيم التابع التي تكون أعلى من محور الفواصل والأقواس للداخل من جهة الأرقام لأننا نريد قيمة الصفر أي : $I =] - \infty - 2[\cup] - 1 + \infty [$

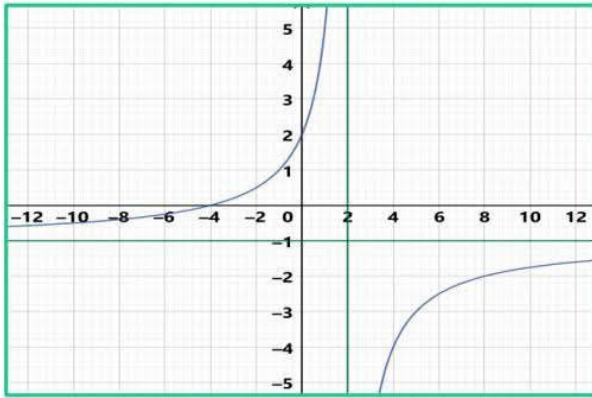
حيث عند 2- التابع يساوي الصفر وأنا أريد قيمة الصفر أما عند 1- التابع غير معرف وبالتالي لا أريد هذه القيمة وبالتالي القوس للخارج عند 1-

6- أوجد حل المتراجحة : $f(x) < 0$

المتراجحة أصغر تماماً من الصفر أي قيم التابع التي تكون أسفل محور الفواصل ولا أريد الصفر أي الأقواس إلى الخارج عند القيمة التي تجعل التابع يساوي الصفر :

$$I =] - 2 - 1 [$$

2- ليكن لدينا الخط البياني الموضح بالشكل :



المطلوب الإجابة عن لأسئلة التالية:

1- ما هي مجموعة تعريف التابع .

من الشكل نلاحظ أن التابع يبدأ من $-\infty$ إلى المقارب الشاقولي 2 حيث لا يوجد قيمة عند هذا المقارب وبالتالي التابع غير معرف عند هذا المقارب ومن ثم يكمل التابع من بعد 2 إلى $+\infty$ وبالتالي تكون مجموعة التعريف:

$$D =] - \infty 2[\cup] 2 + \infty [$$

2- أوجد معادلة المقاربين للتابع السابق.

المقارب الشاقولي: $x = 2$ المقارب الأفقي: $y = -1$

3- أوجد نقطة التناظر للتابع السابق .

نقطة التناظر هي نقطة تقاطع المقاربين أي : $(2, -1)$

4- أوجد نقاط التقاطع مع محاور الإحداثيات .

التقاطع مع محور الفواصل أي عندما $y = 0$ نجد: $(-4, 0)$ التقاطع مع محور الترتيب أي عندما $x = 0$ نجد: $(0, 2)$ 5- أوجد حل المتراجحة : $f(x) > 0$

المتراجحة أكبر من الصفر أي القيم الموجبة بلا قيمة الصفر أي قيم التابع التي تكون أعلى من محور الفواصل والأقواس للخارج من جهة الأرقام لأننا لا نريد قيمة الصفر أي : $I =] - 4 2 [$

حيث عند 4- التابع يساوي الصفر وأنا لا أريد قيمة الصفر وبالتالي القوس للخارج أما عند 2 التابع غير معرف وبالتالي لا أريد هذه القيمة وبالتالي القوس للخارج

6- أوجد حل المتراجحة : $f(x) \leq 0$

المتراجحة أصغر أو تساوي الصفر أي قيم التابع التي تكون أسفل محور الفواصل مع الصفر أي الأقواس إلى الداخل عند قيمة التابع يساوي الصفر أما عند 2 التابع غير معرف وبالتالي لا أريد هذه القيمة وبالتالي القوس للخارج:

$$I =] - \infty - 4[\cup] 2 + \infty [$$

$g(x) = x^2 - 8x + 15 \Rightarrow (x-5)(x-3) = 0$
حيث أوجدنا التابع $g(x)$ والأن سندرس إشارته كما تعلمنا سابقا نوجد الجذور ومن ثم الجدول كما تعلمنا وهنا قمنا باستخدام التحليل المباشر .

$$\text{إما } x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ \text{أو } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

المجال	$-\infty$	3	5	$+\infty$	
$x^2 - 8x + 15$	+	0	-	0	+
	$f_1(x)$ فوق	$f_1(x)$ تحت	$f_1(x)$ فوق	$f_1(x)$ فوق	$f_1(x)$ فوق
	$f_2(x)$	$f_2(x)$	$f_2(x)$	$f_2(x)$	$f_2(x)$

يكون $f_1(x)$ فوق $f_2(x)$ على المجال حيث $g(x) > 0$

$$I =] - \infty 3 [\cup] 5 + \infty [$$

لدينا حلان مختلفان وبالتالي نقاط التقاطع هي عندما $g(x) = 0$ نعوض في التابع إما 5 أو 3 ونوجد y

يكون $f_1(x)$ تحت $f_2(x)$ على المجال حيث $g(x) < 0$

$$I =] 3 5 [$$

يأتي السؤال إما بإعطاء مجال ويجب معرفة الوضع النسبي للمستقيمين أو العكس يكون معي الوضع النسبي ويجب معرفة مثلا: يكون $f_1(x)$ فوق $f_2(x)$ على إحدى المجالات التالية أو ضمن المجال $I =] 3 5 [$ ما هو الوضع النسبي من خلال الجدول السابق نعرف الإجابة إذا كان السؤال أي من النقاط التالية هي نقاط التقاطع أو تنتمي للخط البياني نعوض النقاط في التابعين والنقطة التي يكون فيها التابعين متساويين. تكون نقطة تقاطع ونفس الشيء إذا كان الطلب أي نقطة تنتمي للتابع نعوض النقاط والنقطة التي تحقق التابع تنتمي للتابع كما يلي .

-2 أي من النقاط التالية هي نقطة تقاطع التابعين السابقين:

$$(3, 1), (5, \frac{5}{4}), (2, 2)$$

نأخذ أول نقطة : $(2, 2)$ نعوض في التابعين :

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 \Rightarrow f_1(2) = \frac{1}{4}2^2 - 2(2) + 5$$

$$f_1(2) = \frac{1}{4} - 4 + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$$

وهي تساوي تراتيب النقطة المعطاة وبالتالي النقطة تحقق التابع الأول يجب أن أتأكد أنها تحقق التابع الثاني :

$$f_2(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - 10 \Rightarrow$$

$$f_2(2) = -\frac{3}{4}2^2 + 6(2) - 10 = -3 + 12 - 10 = -1$$

بالتالي النقطة لا تحقق التابع التالي لأن الناتج لا يساوي

تراتبية النقطة وبالتالي نوجد النقطة التالية .

• الوضع النسبي لخطين بيانيين :

1- الحالة الأولى : إذا كان الخطين لتابعين من الدرجة

الثانية وليكن التابع الأول $f_1(x)$ والتابع الثاني $f_2(x)$

نوجد الفرق بين التابعين أي $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$

ونميز ثلاث حالات :

1- $g(x) > 0$ التابع $f_1(x)$ فوق $f_2(x)$.

2- $g(x) = 0$ التابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متقاطعان أو

متماسان إذا كان لدينا جذر مضاعف من مرتبة

زوجية وتكون معادلة المماس : $y = 0$ وتكون نقطة

المماس : $(x_0, 0)$.

3- $g(x) < 0$ التابع $f_1(x)$ تحت $f_2(x)$.

2- الحالة الثانية : إذا كان لدينا معادلة مستقيم مائل من

الشكل : $y_{\Delta} = mx + h$ وخط بياني من الدرجة

الثانية : $f_1(x)$ ندرس إشارة الفرق أيضا يكون لدينا

$$g(x) = f_1(x) - y_{\Delta}$$

ولدينا الحالات التالية :

1- $g(x) > 0$ التابع $f_1(x)$ فوق y_{Δ} .

2- $g(x) = 0$ التابع y_{Δ} و $f_1(x)$ متقاطعان أو متماسان

إذا كان لدينا جذر مضاعف من مرتبة زوجية وتكون

معادلة المماس نفس معادلة المستقيم : $y_{\Delta} = mx + h$

3- $g(x) < 0$ التابع $f_1(x)$ تحت y_{Δ} .

4- إذا كان الطلب دراسة إشارة المقدار مع محور

الفواصل ندرس فقط إشارة التابع المعطى .

وبالتالي يجب إيجاد التابع $g(x)$ ودراسة إشارته كما تعلمنا

سابقا وحسب الجدول نختار الوضع النسبي كما سنشاهد في

الأمثلة .

الأمثلة :

1- ليكن لدينا الخط البياني الموافق للتابع :

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$$

والمطلوب دراسة الوضع النسبي للمستقيمين .

$$f_2(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - 10$$

نوجد الفرق بين التابعين :

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 - (-\frac{3}{4}x^2 + 6x - 10)$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 + \frac{3}{4}x^2 - 6x + 10$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 + \frac{3}{4}x^2 - 6x + 10$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 + \frac{3}{4}x^2 - 6x + 10$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 + \frac{3}{4}x^2 - 6x + 10$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8x + 15 \Rightarrow g(x) = x^2 - 8x + 15$$

بالتالي النقطة لا تحقق التابع التالي لأن الناتج لا يساوي
ترتيب النقطة وبالتالي نوجد النقطة التالية .

نأخذ ثاني نقطة : (0 , 2) نعوض في التابعين :

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 3 \Rightarrow f_1(2) = \frac{3}{4}2^2 - 3(2) + 3$$

$$f_1(2) = 3 - 6 + 3 = 0$$

النقطة تحقق التابع الأول يجب أن أتأكد أنها تحقق التابع الثاني :

$$f_2(2) = -\frac{1}{4}2^2 + 2 - 1 \Rightarrow f_2(2) = -2 + 2 = 0$$

بالتالي النقطة تحقق التابع وبالتالي هي نقطة مماس

5- ليكن لدينا الخط البياني الموافق للتابع :

$$f_1(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \text{ والخط الباني الموافق للتابع}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \text{ والمطلوب دراسة الوضع}$$

النسبي للمستقيمين .

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

$$g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 - (\frac{1}{4}x^2 - x + 1)$$

$$g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1$$

$$g(x) = \frac{2}{4}x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 2)$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

لدينا جذر مضاعف وبالتالي يكون التابع من إشارة x^2

أي موجب $g(x) > 0$ أي يكون $f_1(x)$ فوق $f_2(x)$ على

كامل المجال ما عدا نقطة التماس أي $I = R \setminus [2]$

$$I =] - \infty , 2[\cup] 2 , + \infty [$$

عندما $g(x) = 0$ يكون التابعان متماسان في النقطة :

$$(2, 0)$$

6- ليكن لدينا الخط البياني الموافق للتابع :

$$f_1(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ والمستقيم } \Delta \text{ الذي معادلته}$$

$$y = x - 1 \text{ ما هو الوضع النسبي للتابعين .}$$

$$g(x) = f_1(x) - y_\Delta$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 - (x - 1)$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 - x + 1 = x^2 - 5x + 4$$

$$g(x) = (x - 1)(x - 4)$$

$$\text{إما } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{أو } x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

نأخذ ثاني نقطة : (5 , $\frac{5}{4}$) نعوض في التابعين :

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 \Rightarrow f_1(5) = \frac{1}{4}5^2 - 2(5) + 5$$

$$f_1(5) = \frac{25}{4} - 10 + 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{25}{4} - \frac{20}{4} = \frac{5}{4}$$

وهي تساوي ترتيب النقطة المعطاة وبالتالي النقطة تحقق التابع الأول يجب أن أتأكد أنها تحقق التابع الثاني :

$$f_2(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - 10 \Rightarrow$$

$$f_2(5) = -\frac{3}{4}5^2 + 6(5) - 10 = -\frac{75}{4} + 30 - 10$$

$$f_2(5) = -\frac{75}{4} + 20 = -\frac{75}{4} + \frac{80}{4} = \frac{5}{4}$$

بالتالي النقطة تحقق التابع وبالتالي هي نقطة التقاطع

بنفس الأسلوب سوف نحل بقية التمارين لكن دون شرح

للاختصار .

3- ليكن لدينا الخط البياني الموافق للتابع :

$$f_1(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \text{ والخط الباني الموافق للتابع}$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 \text{ والمطلوب دراسة الوضع}$$

النسبي للمستقيمين .

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

$$g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 - (-\frac{1}{4}x^2 + x - 1)$$

$$g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 + \frac{1}{4}x^2 - x + 1$$

$$g(x) = \frac{4}{4}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow g(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$g(x) = (x - 2)(x - 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

لدينا جذر مضاعف وبالتالي يكون التابع من إشارة x^2

أي موجب $g(x) > 0$ أي يكون $f_1(x)$ فوق $f_2(x)$ على

كامل المجال ما عدا نقطة التماس أي $I = R \setminus [2]$

$$I =] - \infty , 2[\cup] 2 , + \infty [$$

عندما $g(x) = 0$ يكون التابعان متماسان في النقطة :

$$(2, 0)$$

4- أي من النقاط التالية هي نقطة مماس التابعين السابقين:

$$(3, 1), (2, 0), (4, 3)$$

نأخذ أول نقطة : (4 , 3) نعوض في التابعين :

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 3 \Rightarrow f_1(4) = \frac{3}{4}4^2 - 3(4) + 3$$

$$f_1(4) = \frac{3}{4} \times 16 - 12 + 3 = 12 - 12 + 3 = 3$$

النقطة تحقق التابع الأول يجب أن أتأكد أنها تحقق التابع الثاني :

$$f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 \Rightarrow f_2(4) = -\frac{1}{4}4^2 + 4 - 1$$

$$f_2(4) = -4 + 4 - 1 = -1$$

3- يكون $f_1(x)$ تحت xx' على المجال حيث $g(x) < 0$

$$I =]1 \ 4 [$$

9- أوجد مجموعة التعريف والمستقيمات المقاربة ونقاط التناظر وأرسم التابع للتوابع التالية :

$$f(x) = \frac{3x-6}{x-1}$$

مجموعة التعريف : $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$D = R \setminus \{1\} \Rightarrow D =]-\infty \ 1 [\cup]1 \ +\infty [$$

المقاربات :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 3 \quad \text{المقارب الأفقي :}$$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-(-1)}{1} \Rightarrow x = 1 \quad \text{المقارب الشاقولي :}$$

نقطة التناظر : (1, 3)

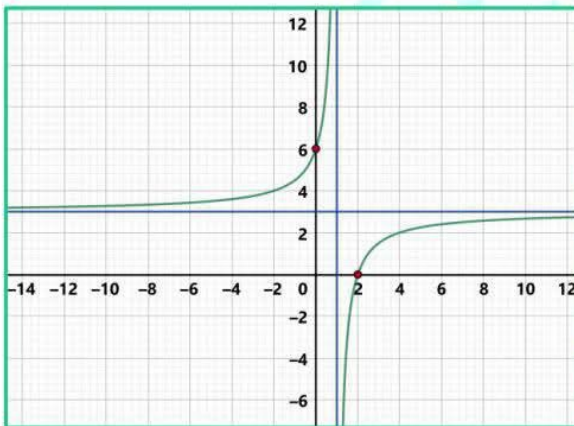
الرسم : نوجد نقاط التقاطع مع محور الإحداثيات إذا كانت النقاط في ربع واحد نرسم النقاط والمقاربتين والتابع يكون متناظر لنقطة تقاطع المحورين وبالتالي يمكننا الرسم في الربع المقابل أما إذا كانت النقاط في ربعين نحدد النقاط والمقاربتين ونرسم حيث التابع لا يقطع المقاربين: التقاطع مع محور الترتيب أي نعوض $x = 0$ ونوجد قيمة y كما يلي :

$$y = \frac{3(0)-6}{0-1} = \frac{-6}{-1} \Rightarrow y = 6 \Rightarrow (0, 6)$$

التقاطع مع محور الفواصل نعوض $y = 0$ ونوجد قيمة x أي :

$$\frac{3x-6}{x-1} = 0 \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$



المجال	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$-5x + 4$	$\begin{matrix} + \\ \text{فوق } f_1(x) \\ y_\Delta \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \text{تحت } f_1(x) \\ y_\Delta \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ \text{فوق } f_1(x) \\ y_\Delta \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \text{فوق } f_1(x) \\ y_\Delta \end{matrix}$

1- يكون $f_1(x)$ فوق y_Δ على المجال حيث $g(x) > 0$

$$I =]-\infty \ 1 [\cup]4 \ +\infty [$$

2- لدينا حلان مختلفان وبالتالي نقاط التقاطع هي عندما

$$g(x) = 0 \quad \text{نعوض في التابع إما 4 أو 1 ونوجد } y$$

3- يكون $f_1(x)$ تحت y_Δ على المجال حيث $g(x) < 0$

$$I =]1 \ 4 [$$

7- ليكن لدينا الخط البياني الموافق للتابع :

$$f_1(x) = x^2 - 2x \quad \text{والمستقيم } \Delta \text{ الذي معادلته}$$

$$y = 2x - 4 \quad \text{ما هو الوضع النسبي للتابعين .}$$

$$g(x) = f_1(x) - y_\Delta$$

$$g(x) = x^2 - 2x - (2x - 4)$$

$$g(x) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$g(x) = (x - 2)(x - 2)$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

لدينا جذر مضاعف وبالتالي إشارة التابع من إشارة x^2

أي التابع موجب على كامل المجال $g(x) > 0$ أي يكون

$f_1(x)$ فوق y_Δ على كامل المجال ما عدا نقطة التماس أي

$$I = R \setminus \{2\} \Rightarrow I =]-\infty \ 2 [\cup]2 \ +\infty [$$

عندما $g(x) = 0$ يكون التابعان متماسان في النقطة :

$$(2, 0)$$

ويكون المستقيم مماس للتابع أي : $y = 2x - 4$ مستقيم مماس للتابع .

8- ليكن لدينا الخط البياني الموافق للتابع :

$$f_1(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{ما هو الوضع النسبي للتابع}$$

بالنسبة لمحور الفواصل

$$f_1(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

$$\text{إما } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{أو } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

المجال	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
	+	0	-	0	+
$x^2 - 4x + 3$	فوق $f_1(x)$	تحت $f_1(x)$	فوق $f_1(x)$	تحت $f_1(x)$	فوق $f_1(x)$
	xx'		xx'		xx'

1- يكون $f_1(x)$ فوق xx' على المجال حيث $g(x) > 0$

$$I =]-\infty \ 1 [\cup]3 \ +\infty [$$

2- لدينا حلان مختلفان وبالتالي نقاط التقاطع هي عندما

$$g(x) = 0 \quad \text{نعوض في التابع إما 3 أو 1 ونوجد } y$$

11- أوجد مجموعة التعريف والمستقيمات المقاربة ونقاط التناظر وأرسم التابع للتوابع التالية :

$$f(x) = \frac{x+1}{x}$$

مجموعة التعريف : $x = 0$

$$D = R \setminus [0] \Rightarrow D =] - \infty 0 [\cup] 0 + \infty [$$

المقاربات :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} \Rightarrow y = 1$$

المقارب الأفقي :

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-(0)}{1} \Rightarrow x = 0$$

المقارب الشاقولي :

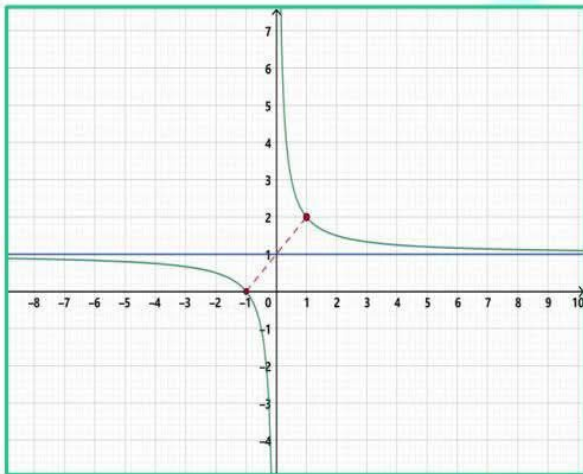
نقطة التناظر : $(0, 1)$

لا يوجد تقاطع مع محور الترتيب لأن لا يمكن لل x أن تساوي الصفر لأنها ليس من مجموعة تعريف التابع .

التقاطع مع محور الفواصل نعوض $y = 0$ ونوجد قيمة x أي :

$$\frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow (-1, 0)$$



1- أوجد مجموعة التعريف والمستقيمات المقاربة ونقاط التناظر وأرسم التابع للتوابع التالية :

$$f(x) = \frac{2x+2}{x-2}$$

مجموعة التعريف : $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$D = R \setminus [2] \Rightarrow D =] - \infty 2 [\cup] 2 + \infty [$$

المقاربات :

$$y = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} \Rightarrow y = 2$$

المقارب الأفقي :

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-(-2)}{1} \Rightarrow x = 2$$

المقارب الشاقولي :

نقطة التناظر : $(2, 2)$

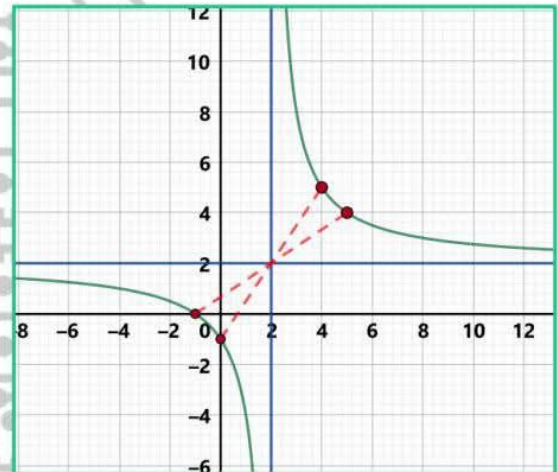
التقاطع مع محور الترتيب أي نعوض $x = 0$ ونوجد قيمة y كما يلي :

$$y = \frac{2(0)+2}{0-2} = \frac{+2}{-2} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

التقاطع مع محور الفواصل نعوض $y = 0$ ونوجد قيمة x أي :

$$\frac{2x-2}{x-1} = 0 \Rightarrow 2x+2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{2}$$

$$x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$$



حيث نجد نقاط التقاطع في الربع الثالث فقط نمدد مستقيمات من كل نقطة تقاطع إلى نقطة التناظر ونرسم نفس طول القطعة المستقيمة ونحدد نقطة ومنثم نرسم القسم الثاني من التابع .

SAMER A. AL-SAMIR
ELECTRONICS ENGINEER

نموذج أتمتة

- ليكن لدينا جدول إشارة للفرق بين تابعين وليكن $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$ والمطلوب الإجابة عن الأسئلة التالية :

المجال	2	3	5	6			
$g(x)$	-1	+	0	-	0	+	+2

- 1- تكون مجموعة تعريف التابع السابق :

$I =] - \infty + \infty [$	D	$I =] 2 + \infty [$	C	$I =] 3 \ 5 [$	B	$I = [2 \ 6]$	A
-----------------------------	---	----------------------	---	-----------------	---	-----------------	---

مجموعة التعريف هي من أول حد في المجال إلى آخر أي : $I = [2 \ 6]$

- 2- يكون $f_2(x)$ فوق $f_1(x)$ على المجال :

$I =] - \infty + \infty [$	D	$I =] 2 + \infty [$	C	$I =] 3 \ 5 [$	B	$I = [2 \ 6]$	A
-----------------------------	---	----------------------	---	-----------------	---	-----------------	---

يكون $f_2(x)$ فوق $f_1(x)$ عندما يكون $g(x)$ سالب أي $I =] 3 \ 5 [$

- 3- على المجال $[5 \ 6]$ يكون الوضع النسبي للتابعين :

متماسان	D	$f_2(x)$ فوق $f_1(x)$	C	متقاطعان	B	$f_1(x)$ فوق $f_2(x)$	A
---------	---	-----------------------	---	----------	---	-----------------------	---

بما أن $g(x)$ موجب على المجال المعطى يكون لدينا : $f_1(x)$ فوق $f_2(x)$

- ليكن لدينا جدول إشارة للفرق بين تابعين وليكن $g(x) = f_1(x) - y_\Delta$ والمطلوب الإجابة عن الأسئلة التالية :

المجال	$-\infty$	0	1	3	4	$+\infty$
$f_1(x)$		+	0	-	0	+
y_Δ	-	-1	-	0	+	
$g(x)$		+	0	-	0	+

- 4- تكون مجموعة تعريف التابع السابق $g(x)$:

$I =] - \infty + \infty [$	D	$I =] 2 + \infty [$	C	$I =] 3 \ 5 [$	B	$I = [2 \ 6]$	A
-----------------------------	---	----------------------	---	-----------------	---	-----------------	---

مجموعة التعريف هي من أول حد في المجال إلى آخر أي : $I =] - \infty + \infty [$

- 5- على المجال $[1 \ 4]$ يكون الوضع النسبي للتابعين :

متماسان	D	y_Δ تحت $f_1(x)$	C	متقاطعان	B	y_Δ تحت $f_1(x)$	A
---------	---	-------------------------	---	----------	---	-------------------------	---

بما أن $g(x)$ سالب على المجال المعطى يكون لدينا : $f_1(x)$ تحت y_Δ

- 6- يكون $f_1(x)$ فوق y_Δ على المجال :

$I =] - \infty 0 [\cup] 3 + \infty [$	D	$I =] 1 3 [\cup] 4 + \infty [$	C	$I =] - \infty 1 [\cup] 4 + \infty [$	B	$I =] - \infty 3 [\cup] 4 + \infty [$	A
--	---	-----------------------------------	---	--	---	--	---

يكون $f_1(x)$ فوق y_Δ عندما يكون $g(x)$ موجب أي $I =] - \infty 1 [\cup] 4 + \infty [$

- 7- تكون نقاط تقاطع y_Δ مع محاور الإحداثيات :

$(1, 0)(0, -1)$	D	$(0, 3)(4, 0)$	C	$(3, 0)(0, -1)$	B	$(1, 0)(0, 4)$	A
-----------------	---	----------------	---	-----------------	---	----------------	---

حيث نقاط التقاطع عندما $x = 0$ تكون قيمة $y = -1$ وعندما $y = 0$ تكون قيمة $x = 1$ أي : $(1, 0)(0, -1)$

- 8- يكون حل المتراجحة $f_1(x) \leq 0$:

$I =] - \infty + \infty [$	D	$I = [1 \ 3]$	C	$I =] 3 \ 4 [$	B	$I =] 1 \ 3 [$	A
-----------------------------	---	-----------------	---	-----------------	---	-----------------	---

بما أن المتراجحة أصغر وتساوي الصفر نأخذ المجال السالب مع قيمة الصفر أي الأقواس للداخل ونحدد التابع

المطلوب وهو $f_1(x)$: $I = [1 \ 3]$

9- ليكن لدينا التابعين المعرفين وفق $f(x) = x - 2$ والتابع $g(x) = 2\sqrt{x}$ تكون نقاط التقاطع التابعين :					
A	لا يوجد نقاط تقاطع	B	$(3, 1)(0, -2)$	C	$(2, 0)(1, 2)$
نقاط التقاطع يجب أن تحقق التابعين وبالتالي يكون لدينا : $(3, 1) \Rightarrow f(x) = x - 2 \Rightarrow 1 = 3 - 2 \Rightarrow 1 = 1$, $g(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow 3 = 2\sqrt{1} \Rightarrow 3 \neq 1$ النقطة الأولى لا تحقق التابعين ننقل للنقطة التالية: $(2, 0) \Rightarrow f(x) = x - 2 \Rightarrow 0 = 2 - 2 \Rightarrow 0 = 0$, $g(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow 2 = 2\sqrt{2} \Rightarrow 0 \neq 2\sqrt{2}$ النقطة الثانية لا تحقق التابعين ننقل للنقطة التالية: و النقطة الثالثة وجدنا سابقا أنها لا تحقق وبالتالي لا يوجد نقاط تقاطع					
10- ليكن c_f و c_g خطين بيانيين للتابعين f و g المعرفين وفق $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ عندئذ تكون نقطتي تقاطع الخطين هما : (سؤال امتحان نصفى)					
A	$(1, 1)(0, 0)$	B	$(0, 1)(1, 0)$	C	$(0, 1)(0, 2)$
$(1, 1) \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow 1 = 1^2 \Rightarrow 1 = 1$, $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow 1 = \sqrt{1} \Rightarrow 1 = 1$ $(0, 0) \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow 0 = 0^2 \Rightarrow 0 = 0$, $g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow 0 = \sqrt{0} \Rightarrow 0 = 0$ النقطتين اللتان تحققان التابعين السابقين هما النقطتين الصحيحتين $(1, 1)(0, 0)$					
11- ليكن لدينا التابعين المعرفين وفق $f(x) = \frac{2}{x}$ والتابع $g(x) = 2\sqrt{x}$ تكون نقاط التقاطع التابعين :					
A	$(3, 1)$	B	$(1, 2)$	C	$(2, 1)$
نقاط التقاطع يجب أن تحقق التابعين وبالتالي يكون لدينا : $(1, 2) \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow 2 = \frac{2}{1} \Rightarrow 2 = 2$, $g(x) = 2\sqrt{1} \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow (1, 2)$					
12- ليكن لدينا التابع المعرف وفق $f(x) = x^2 - 9x + 3$ تكون نقطة التقاطع مع محور الترتيب :					
A	$(3, 0)$	B	$(0, 0)$	C	$(0, 3)$
التقاطع مع محور الترتيب عندما $x = 0$ ونوجد قيمة y كما يلي : $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 9(0) + 3 \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3)$					
13- ليكن لدينا التابع المعرف وفق $f(x) = x^2 - 9$ تكون نقطة التقاطع مع محور الفواصل :					
A	$(0, 6)(0, -6)$	B	$(6, 0)(-6, 0)$	C	$(0, 3)(0, -3)$
التقاطع مع محور الترتيب عندما $y = 0$ ونوجد قيمة x كما يلي : $y = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3 \Rightarrow (3, 0)(-3, 0)$					
14- ليكن لدينا التابع المعرف وفق $f(x) = -x^2 + 2x$ تكون إحدى النقاط تنتمي للخط البياني للتابع :					
A	$(-2, -8)$	B	$(-2, -6)$	C	$(-2, -4)$
النقطة التي تحقق التابع هي النقطة الصحيحة حيث نعوض قيمة x للنقطة يجب أن نحصل على قيمة y للنقطة كما يلي $(-2, -8) \Rightarrow f(-2) = -(-2)^2 + 2(-2) \Rightarrow -8 = -4 - 4 \Rightarrow -8 = -8 \Rightarrow (-2, -8)$					
15- ليكن لدينا التابع المعرف وفق $f(x) = ax^2 - 3x + 2$ عين قيمة a ليمر التابع بالنقطة $(2, 4)$:					
A	$a = -2$	B	$a = 2$	C	$a = 4$
$(2, 4) \Rightarrow f(2) = a(2)^2 - 3(2) + 2 \Rightarrow 4 = 4a - 6 + 2 \Rightarrow 4 = 4a - 4 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$					
16- ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ الوضع النسبي للخط c والمماس Δ الذي معادلته $y = 2x - 1$ هو : (سؤال امتحان نصفى)					
A	c فوق Δ على R	B	c فوق Δ على R^{*-}	C	c تحت Δ على R
$g(x) = f(x) - y = -x^2 + 2x - 1 - 2x + 1 = -x^2 \Rightarrow g(x) \leq 0$ للتابع $g(x)$ حل وحيد مضاعف وهو الصفر وبالتالي تكون إشارته حسب إشارة $-x^2$ أي أنه سالب على R $f(x)$ تحت y على كل R أي c تحت Δ على R					

17- مجموع جذري المعادلة $f(x) = x^2 - 6x + 8$: (سؤال امتحان نصفى)

A -6 B 8 C -8 D 6

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{6}{1} \Rightarrow x_1 + x_2 = 6$$

18- جداء جذري المعادلة $f(x) = x^2 - 6x + 8$:

A 8 B -6 C -8 D 6

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 8$$

19- ليكن c الخط البياني للتابع f المعرفة على $\{R \setminus -2\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x+1}{2x+4}$ يقبل مقارباً أفقياً معادلته : (سؤال امتحان نصفى)

A $x = 2$ B $x = -2$ C $x = -1$ D $x = 1$

$$y = \frac{a}{c} = \frac{2}{2} \Rightarrow y = 1$$

20- ليكن c الخط البياني للتابع f المعرفة على $\{R \setminus -2\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x+1}{2x+4}$ يقبل مقارباً شاقولياً معادلته : (سؤال امتحان نصفى)

A $x = -2$ B $x = 2$ C $x = -1$ D $x = 1$

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-4}{2} \Rightarrow x = -2$$

21- ليكن c الخط البياني للتابع f المعرفة على $\{R \setminus -2\}$ وفق: $f(x) = \frac{-x^2+1}{x}$ أي من النقاط تنتمي للتابع : (سؤال امتحان نصفى)

A $(-1, 0)$ B $(-1, 1)$ C $(1, 1)$ D $(-1, -1)$

$$(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = \frac{-(-1)^2+1}{-1} \Rightarrow 0 = \frac{-1+1}{-1} \Rightarrow 0 = \frac{0}{-1} \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

22- يكون حل المتراجحة التالية $x^2 + 1 \geq 0$:

A $I =]-\infty + \infty[$ B $I =]1 + \infty[$ C $I =]-\infty - 1[$ D $I =]-1 + \infty[$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{مستحيلة الحل} \Rightarrow R \Rightarrow \text{المقدار موجب على كل } I =]-\infty + \infty[$$

23- يكون حل المتراجحة التالية $x(x+1) \leq 0$:

A $I =]-1 + 0[$ B $I = [-1 + 0]$ C $I =]-\infty - 1[$ D $I =]0 + \infty[$

إما $x = 0$ أو $x = -1$ ← لدراسة
الإشارة نكتب التابع بالشكل الأساسي أي $x^2 + x$
 $I = [-1 + 0]$

المجال	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x^2 + x$	+	0	-	+

24- يكون حل المتراجحة التالية $x^2 + 4x + 4 > 0$:

A $I =]-\infty - 2[$ B $I = [-2 + \infty]$ C $I =]-\infty - 2[\cup]-2 + \infty[$ D $I =]-\infty + \infty[$

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

حل مضاعف إشارة المقدار من إشارة x^2 أي موجب
على كامل المجال لا نريد الصفر وبالتالي نستثنى قيمة -2

المجال	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x^2 + x$	+	0	+

$$I =]-\infty - 2[\cup]-2 + \infty[$$

25- ليكن c_f و c_g خطين بيانيين للتابعين f و g المعرفين وفق $f(x) = x^2 - 4x + 3$ و $g(x) = x - 1$ عندئذ تكون نقطتي تقاطع الخطين هما :

(1,0), (4,3) **D** (1,0), (3,4) **C** (-4,-3), (1,0) **B** (4,3), (-1,0) **A**

$(4,3) \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow 3 = 4^2 - 4(4) + 3 \Rightarrow 3 = 3$, $g(x) = x - 1 \Rightarrow 3 = 4 - 1 \Rightarrow 3 = 3$
 $(1,0) \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow 0 = 1^2 - 4(1) + 3 \Rightarrow 0 = 0$, $g(x) = x - 1 \Rightarrow 0 = 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0$
 النقطتين اللتان تحققان التابيعن السابقين هما النقطتين الصحيحتين **(1,0), (4,3)**

26- ليكن c الخط البياني للتابع f المعروف وفق: $f(x) = \frac{x+3}{3x+5}$ تكون معادلة المقاربين :

$x = \frac{1}{3}, y = \frac{5}{3}$ **D** $x = \frac{-5}{3}, y = -\frac{1}{3}$ **C** $x = \frac{1}{3}, y = \frac{-5}{3}$ **B** $x = \frac{-5}{3}, y = \frac{1}{3}$ **A**

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-5}{3} \Rightarrow x = -1, y = \frac{a}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

27- ليكن البياني للتابع f المعروف وفق: $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ تكون معادلة المقاربين :

$x = -1, y = 1$ **D** $x = 1, y = 1$ **C** $x = -1, y = -1$ **B** $x = 1, y = -1$ **A**

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-1}{1} \Rightarrow x = -1, y = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} \Rightarrow y = 1$$

28- ليكن التابع المعروف وفق: $f(x) = \frac{ax+3}{2x+1}$ عين قيمة a اذا كان لدينا مقارب شاقولي معادلته $y = 4$:

$a = -4$ **D** $a = 2$ **C** $a = 8$ **B** $a = 4$ **A**

$$y = \frac{a}{c} = 4 \Rightarrow \frac{a}{2} = 4 \Rightarrow a = 8$$

29- ليكن التابع المعروف وفق: $f(x) = \frac{2x+3}{ax-4}$ عين قيمة a اذا كان لدينا مقارب شاقولي معادلته $x = 2$:

$a = -4$ **D** $a = 2$ **C** $a = 8$ **B** $a = 4$ **A**

$$x = \frac{-d}{c} = 2 \Rightarrow \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{4}{2} \Rightarrow a = 2$$

SAMER ALSOSO
ELECTRONICS ENGINEER