معلومات نظرية ودساتير

الجمع الجبري لعددين

اشارتين متشابهتين نفس الاشارة ثم نجمع دون اشارات

$$+2+7=+9$$
$$-2-7=-9$$

اشارتين مختلفتين نأخذ اشارة الكبير ثم نطرح دون اشارات

$$+2-7=-5$$
$$-2+7=+5$$

الضرب الجبري لعددين:

ضرب عددين متشابهين بالاشارة هو عدد موجب ونضرب العددين دون اشارات

$$(+2)(+7)=+14$$
$$(-2)(-7)=+14$$

ضرب عددين مختلفين بالاشارة هو عدد سالب ونضرب العددين دون اشارات

$$(+2)(-7)=-14$$
$$(-2)(+7)=-14$$

$(-)^{\text{زوجي}}=+$	$(-)^{\text{فردي}}=-$
$(+)^{\text{زوجي}}=+$	$(+)^{\text{فردي}}=+$

عدد الحدود = عدد اشارات + أو − خارج الاقواس.

هام: في كل مرة نطبق افضلية العمليات الحسابية

مثال: $\Delta=(-2)^2-4(5)(-3)$

الحل: مباشر

$$\Delta=+4+60=64$$

مثال: $A=2+\underbrace{4\times5}_{\text{ضرب}}+\underbrace{2(5-4)}_{\text{ضرب وقوس}}-\underbrace{3(2)^3}_{\text{ضرب وقوة}}$

الحل:

$$A=2+20+2-24=24-24=0$$

افضلية العمليات الحسابية

① الاقواس.
② القوة والجذور بنفس المستوى.
③ الضرب والتقسيم بنفس المستوى.
④ الجمع والطرح.

حل معادلة من الدرجة الاولى:

- نفك الاقواس ان وجدت
- المجاهيل = المعاليم مع تغير اشارة الحد المنقول

- حد مجهول = حد معلوم
- المجهول = $\dfrac{\text{الحد المعلوم}}{\text{امثال المجهول}}$

حل المعادلة: $2(5x-3)=4(-x-5)$

الحل:

$$10x-6=-4x-20$$
$$10x+4x=+6-20\Rightarrow 14x=-14$$
$$x=\frac{-14}{14}=-1$$

حل المعادلة: $5x+9=3x+1$

الحل:

$$5x-3x=-9+1\Rightarrow 2x=-8$$
$$x=\frac{-8}{2}=-4$$

حل المعادلة: $3x-9=0$

الحل:

$$3x=9\Rightarrow x=\frac{9}{3}=3$$

التحليل المباشر لحل المعادلة درجة ثانية

حل المعادلات الآتية:

1) $x^2+5x+4=0$

مسودة
✓ +1 +4
X +2 +2

الحل: $(x+1)(x+4)=0 \leftarrow$

اما $x+1=0\Rightarrow x=-1$

أو $x+4=0\Rightarrow x=-4$

2) $x^2-7x+6=0$

مسودة
✓ −1 −6
X −2 −5

الحل: $(x-1)(x+6)=0$

اما $x-1=0\Rightarrow x=1$

أو $x+6=0\Rightarrow x=-6$

③ $x^2+4x-12=0$

مسودة
X −1 +12
✓ −2 +6
X −3 +4

$(x-2)(x+6)=0$

اما: $x-2=0\Rightarrow x=+2$

أو: $x+6=0\rightarrow x=-6$

④ $x^2-6x-7=0$

الحل:

مسودة
+1 −7

$(x+1)(x-7)=0$

اما, $x+1=0\Rightarrow x=-1$

أو $x-7=0\Rightarrow x=+7$

اذا كانت المعادلة ذات حدين نميز حالتين:

① حد رموز وحد عدد نحلها بطريقة الدرجة الاولى: المجاهيل = المعاليم

مثال ❶: حل المعادلة: $2x^2-50=0$

الحل: $2x^2=50 \Rightarrow x^2=\frac{50}{2}=25$

إما $x=+5$ أو $x=-5$

② حل المعادلة: $x^2-3=0$

الحل: $x^2=3$

إما: $x=+\sqrt{3}$

أو: $x=-\sqrt{3}$

③ حل المعادلة: $x^3+1=0$

الحل: $x^3=-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1}=-1$

④ حل المعادلة: $2x^2=0$

الحل: $2x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{0}{2}=0 \Rightarrow x=0$

② حدين رموز: نحلها بطريقة العامل المشترك:

مثال ① حل المعادلة: $2x^2-4x=0$

الحل: $2x(x-2)=0$

إما $2x=0 \Rightarrow x=\frac{0}{2}=0$

أو: $x-2=0 \Rightarrow x=+2$

مثال ② حل المعادلة: $x^3-3x=0$

الحل: $x(x^2-3)=0$

إما $x=0$

أو $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$ $x=-\sqrt{3}$ ، $x=+\sqrt{3}$

اذاً يوجد ثلاثة حلول $S=\{0,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

مثال ③ حل المعادلة: $2x^3-6x^2=0$

الحل: $2x^2(x-3)=0$

إما $2x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{0}{2}=0 \Rightarrow x=0$

أو $x-3=0 \Rightarrow x=+3$

حل في R: $ax^2+bx+c=0$

$$\Delta=b^2-4ac$$

نميز ثلاث حالات:

① $\Delta>0$ لها حلان مختلفان هما

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

② $\Delta=0$ لها حل مضاعف هو:

$$x=\frac{-b}{2a}$$

٣) $\Delta<0$ ليس لها اي حل في R.

انشر كلا مما يلي:

$(A+B)^2=A^2+2A\cdot B+B^2$

$(2x+5)^2=4x^2+\overset{2(2x)(5)}{20x}+25$

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$(3x-4)^2=9x^2-\overset{2(3x)(4)}{24x}+16$

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

$(x+7)(x-7)=x^2-49$

حلل: $x^2-16=(x-4)(x+4)$

حلل: $4x^2-9=(2x-3)(2x+3)$

المهندس محمد كريم
درعا المدينة
شرق المجمع الحكومي
شمال مدرسة الأندلس

معلومات نظرية ودساتير

$A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$

دستور المسافة بين نقطتين $[AB]$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

دستور ميل المستقيم المار من A و B

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

دستور المستقيم المار من A و B :

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$

دستور احداثي N منتصف $[AB]$:

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \quad y_N = \frac{y_A + y_B}{2}$$

المستقيمان المتوازيان: لهما نفس الميل

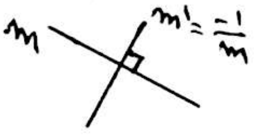
$m_1 = m_2$ ⫽

المستقيمان المتعامدان: جداء ميليهما يساوي -1 .

$m \cdot m' = -1$

أو :

$m' = \frac{-1}{m}$



المستقيم $y = ax + b$ ميله $m = a$

المستقيم $ax + by + c = 0$ ميله

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{\text{عكس امثال } x}{\text{امثال } y}$$

الدائرة ذات الشكل النموذجي

$x^2 + y^2 = R^2$ تمثل معادلة دائرة مركزها $A_0(0,0)$ ونصف قطرها R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

دائرة مركزها $A_0(x_0 , y_0)$ ونصف قطرها R

الشكل النموذجي

الشكل العام للدائرة :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

الإتمام الى مربع كامل: "انظر الامثلة"

كل رمز درجة ثانية وأولى نحتاج الى اتمام الى مربع كامل.

كل رمز درجة ثانية فقط لا نحتاج الى اتمام الى مربع كامل.

كل رمز درجة اولى فقط لا نحتاج الى اتمام الى مربع كامل. "انظر الامثلة"

نجمع الدائرة والقطع المكافئ والناقص والزائد الاقواس التربيعية بجهة طرف وما تبقى الى طرف آخر.

ثلاثة حدود مربع كامل تتحول الى قوس تربيع كما يلي :

$(\text{جذر الاول}\ \text{اشارة الثاني}\ \text{جذر الثالث})^2$

الوضع النسبي بين الدائرة (c) والنقطة $A(x_A , y_A)$

الحل : نوجد قوة النقطة A أي بالتعويض نجد $F(A)$ ونميز ثلاث حالات :

① $F(A) > 0$ فإن A خارج الدائرة

② $F(A) < 0$ فإن A داخل الدائرة

③ $F(A) = 0$ فإن A تقع على الدائرة.

الوضع النسبي بين الدائرة c والمستقيم Δ

$\Delta : ax + by + c = 0$

نوجد l بعد $A_0(x_0 , y_0)$ عن المستقيم Δ

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نميز ثلاث حالات :

① $l > R$ المستقيم لا يقطع الدائرة

② $l < R$ المستقيم قاطع للدائرة في نقطتين.

③ $L = R$ المستقيم مماس للدائرة.

المماس لمنحني الدائرة او المكافئ او الناقص او الزائد او منتابع :

- نحل مشكلة نقطة المماس $A(x_A , y_A)$
- نشتق
- لحظة التعويض نقيم $y' = m$ هي ميل المماس .
- دستور المماس علم ميله ويمر من A

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$R = \frac{\text{القطر}}{2}$$

مثلث ABC ونريد ان نبرهن انه قائم في B نحسب AB^2 , BC^2 و AC^2 وحسب عكس فيثاغورث اذا تحقق

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow B \text{ قائم في}$$

امثلة في الهندسة التحليلية

1 لدينا النقط في مستو منسوب :

$A(-2,0)$, $B(2,3)$, $C(5,-1)$

1) احسب الاطوال AB , AC و BC

2) احسب محيط المثلث ABC

3) برهن ان ABC متساوي الساقين .

4) برهن ان ABC قائم في B .

الحل : ① دستور المسافة AB :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(5+2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

$$BC = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

2)

محيط المثلث $= AB + AC + BC$

محيط المثلث $= 5 + \sqrt{50} + 5$

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

محيط المثلث $= 10 + 2\sqrt{5}$

3) نلاحظ ان : $AB = BC = 5$

فالمثلث متساوي الساقين راسه B

4)

$$(AB)^2 = (5)^2 = 25$$

$$(BC)^2 = (5)^2 = 25$$

$$(AC)^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$$

نلاحظ ان :

$$50 = 25 + 25$$

أي

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

فالمثلث قائم في B حسب عكس فيثاغورث

---

2 في مستو منسوب لدينا النقطة $A(-1,3)$ والمستقيم $\Delta: 2x - y + 3 = 0$ المطلوب :

1) اوجد ميل المستقيم المفروض Δ .

2) اوجد معادلة Δ_1 المار من A موازياً Δ

3) اوجد معادلة Δ_2 المار من $B(1,5)$ عمودياً على Δ .

4) اوجد بعد النقطة A عن المستقيم Δ .

الحل : 1)

$$m = \frac{\text{عكس امثال } x}{\text{امثال } y} = \frac{-2}{-1} = 2$$

2) $\Delta_1 // \Delta$ لهما نفس الميل

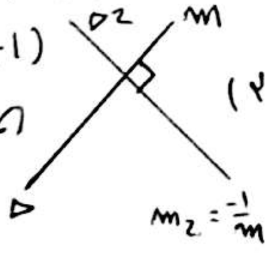
$m_1 = m = 2$ و $\boxed{A(-1,3)}$

الدستور :

$$\Delta_1 : y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Delta_1 : y - 3 = 2(x+1)$$

3)



المتعامدان لذلك :

$$m_2 = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$$

ويمر من $B(1,5)$ نكتب الدستور ونعوض :

$$\Delta_2 : y - 5 = \frac{-1}{2}(x - 1)$$

4) دستور البعد $A(-1,3)$ عن Δ هو

$$l = \frac{|2x_A - y_A + 3|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}}$$

$$l = \frac{|2(-1) - (3) + 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-2-3+3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\boxed{٣}$ لدينا في مستوٍ منسوب: النقطتين:

$A(2,3)$ و $B(4,5)$

والمستقيم:

$\Delta: 3x-4y-4=0$

والمطلوب: ١) اوجد المسافة AB

٢) اوجد ميل المستقيم AB.

٣) اوجد معادلة المستقيم AB

٤) اوجد المستقيم Δ_1 العمودي على AB ويمر من $C(-1,5)$

٥) اوجد احداثي N منتصف $[AB]$

٦) اوجد بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

الحل:

① دستور المسافة: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$$AB=\sqrt{(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

② دستور الميل: $m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

$$m_{AB}=\frac{5-3}{4-2}=\frac{2}{2}=1$$

٣) المستقيم (AB) ميله $m=1$ ويمر من النقطة $A(2,3)$ الدستور:

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

$$y-3=1(x-2)$$

٤)

$$m_1=\frac{-1}{m_{AB}}=\frac{-1}{1}=-1$$

ويمر من $C(-1,5)$ نكتب الدستور ونعوض

$$y-5=-1(x+1)$$

٥)

$$x_N=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$y_N=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$\boxed{N(3,4)}$

⑥ دستور بعد نقطة A عن مستقيم Δ

$$l=\frac{|3x_A-4y_A-4|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}$$

$$l=\frac{|3(2)-4(3)-4|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|6-12-4|}{\sqrt{25}}$$

$$l=\frac{|-10|}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$\boxed{٤}$ دائرة معادلتها:

$$x^2+y^2+2x-4y-11=0$$

والنقطة $A(3,1)$ والمستقيم

$$\Delta: 2x+y+5=0$$

١) اوجد مركز الدائرة ونصف قطرها.

٢) ما الوضع النسبي بين الدائرة والنقطة A

٣) ما الوضع النسبي للدائرة والمستقيم Δ.

الحل: ①

$$\overbrace{x^2+\underset{\downarrow\,(1)^2}{2x}+1}-1+\overbrace{y^2-4y+\underset{\swarrow\,(2)^2}{4}}-4-11=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=1+4+11=16$$

دائرة مركزها $A_0(-1,2)$ ونصف قطرها

$$R=\sqrt{16}=4$$

٢) نوجد قوة النقطة $A(3,$

$$F(A)=(3)^2+(1)^2+2(3)-4(1)-11$$

$$F(A)=9+1+6-4-11=1>0$$

اذن A خارج الدائرة.

٣) نوجد l بعد مركز الدائرة $A_0(-1,2)$ عن المستقيم Δ:

$$l=\frac{|2x+y+5|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{|2(-1)+(2)+5|}{\sqrt{4+1}}$$

$$l=\frac{|-2+2+5|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$l=\sqrt{5}<R=4$$

اذن المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين

٥ دائرة معادلتها :

$x^2-8x+(y-5)^2-9=0$

والنقطة $B(4,2)$ والمستقيم

$D: 3x+4y-62=0$

١) اوجد مركز الدائرة واحسب نصف قطرها

٢) ما الوضع النسبي للدائرة والنقطة B

٣) ما الوضع النسبي للدائرة والمستقيم Δ.

الحل : ١)

$$\overbrace{x^2-\underset{\substack{\downarrow\\(4)^2}}{8x}+16}-16+(y-5)^2-9=0$$

$(x-4)^2+(y-5)^2=16+9=25$

دائرة مركزها $A_0(4,5)$

ونصف قطرها

$R=\sqrt{25}=5$

٢) نوجد قوة النقطة

$B(4,2)$:

$F(B)=(4)^2-8(4)+(2-5)^2-9$

$F(B)=16-32+9-9=-16<0$

اذن B داخل الدائرة.

٣) نوجد l بعد $A_0(4,5)$ عن المستقيم D :

$$l=\frac{|3x+4y-62|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\frac{|3(4)+4(5)-62|}{\sqrt{9+16}}$$

$$l=\frac{|12+20-62|}{\sqrt{25}}=\frac{|-30|}{5}=\frac{30}{5}=6$$

$l=6 > R=5$

اذن المستقيم خارج الدائرة اي لا تقاطع بينهما.

٦ دائرة معادلتها :

$x^2+y^2+2y-19=0$

١) اوجد مركزها واحسب نصف قطرها

٢) اثبت ان النقطة $A(4,1)$ تقع على الدائرة واكتب معادلة المماس لها فيها.

الحل : ١)

$$x^2+\overbrace{y^2+\underset{\substack{\downarrow\\(1)^2}}{2y}+1}-1-19=0$$

$(x)^2+(y+1)^2=1+19=20$

دائرة مركزها $A_0(0,-1)$

ونصف قطرها $R=\sqrt{20}$

٢)

$A(4,1): (4)^2+(1)^2+2(1)-19=0$

$16+1+2-19=0 \Rightarrow 0=0$

محققة اذن A تقع على الدائرة

نشتق : $2x+2yy'+2y'=0$

نعوض : $2(4)+2(1)m+2m=0$

$4m=-8 \Rightarrow$ ميل المماس $m=\frac{-8}{4}=-2$

دستور المماس : $y-y_A=m(x-x_A)$

نعوض : $y-1=-2(x-4)$

٧ اوجد معادلة دائرة اذا علمت ان مركزها $A_0(1,-2)$ ونصف قطرها $R=3$

الحل : الشكل النموذجي :

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

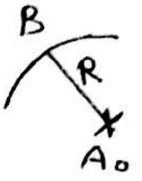
نعوض : $(x-1)^2+(y+2)=9 \leftarrow (3)^2$

٨ اوجد معادلة دائرة مركزها $A_0(-3,1)$ وتمر بالنقطة $B(0,5)$

الحل : الشكل النموذجي :

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$$R = A_0B = \sqrt{(x_B - x_{A_0})^2 + (y_B - y_{A_0})^2}$$



$$R = \sqrt{(0+3)^2 + (5-1)^2}$$

$$R = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

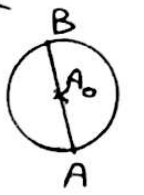
نعوض في الشكل النموذجي:

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = (5)^2 = 25$$

$\boxed{9}$ أوجد معادلة دائرة قطرها AB حيث $A(-1,-2)$, $B(5,6)$

الحل: الشكل النموذجي:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$



القطر $= AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

القطر $AB = \sqrt{(5+1)^2 + (6+2)^2}$

القطر $= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

نصف القطر $R = \frac{\text{القطر}}{2} = \frac{10}{2} = 5$

مركزها A_0 منتصف $[AB]$

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$A_0(2,2)$$

نعوض:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (5)^2 = 25$$

$\boxed{10}$ أوجد معادلة دائرة مركزها $A_0(1,2)$ وتمس المستقيم $3x + 4y - 1 = 0$

الحل: الدستور:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

المستقيم مماس للدائرة لذلك

$$R = l = \frac{|3x_0 + 4y_0 - 1|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}}$$

$$R = \frac{|3(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3+8-1|}{\sqrt{25}}$$

$$R = \frac{10}{5} = 2$$

نعوض:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (2)^2 = 4$$

$\boxed{11}$ دورة ٢٠٠٥ — ٧٠ درجة

في مستوٍ لدينا معادلة دائرة:

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$$

① عيّن مركز الدائرة وطول نصف قطرها.

② برهن أن المستقيم $3x - 4y + 5 = 0$ مماس لهذه الدائرة.

الحل: ①:

$$\underbrace{x^2 - 8x + 16}_{(4)^2} - 16 + \underbrace{y^2 + 4y + 4}_{(2)^2} - 4 - 5 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 16 + 4 + 5 = 25$$

دائرة مركزها $A_0(4,-2)$

ونصف قطرها $R = \sqrt{25} = 5$

② نوجد l بعد $A_0(4,-2)$ عن المستقيم

$$l = \frac{|3x_0 - 4y_0 + 5|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$l = \frac{|3(4) - 4(-2) + 5|}{\sqrt{9+16}}$$

$$l = \frac{|12 + 8 + 5|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

$l = 5 = R = 5 \Rightarrow$ المستقيم مماس للدائرة

١٣ | دورة ٢٠٠٦ | ٦٠ درجة

في مستوٍ منسوب لدينا دائرة معادلتها:

$$x^2+y^2-2x+4y-4=0$$

١) عيّن مركز الدائرة واحسب طول نصف قطرها

٢) احسب قوة النقطة $A(1,-1)$ واستنتج وضع النقطة A بالنسبة للدائرة.

الحل: ١)

$$\underbrace{x^2-2x+1}_{(1)^2}-1+\underbrace{y^2+4y+4}_{(2)^2}-4-4=0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=+1+4+4=9$$

دائرة مركزها $A_0(1,-2)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{9}=3$

٢) $A(1,-1)$

$$F(A)=(1)^2+(-1)^2-2(1)+4(-1)-4$$

$$F(A)=1+1-2-4-4=-8<0$$

إذاً A تقع داخل الدائرة.

١٢ | دورة ٢٠٠٧ | ٤٠ درجة

عيّن مركز ونصف قطر الدائرة الذي معادلتها:

$$(x-2)^2+y^2-2y-24=0$$

الحل:

$$(x-2)^2+\underbrace{y^2-2y+1}_{(1)^2}-1-24=0$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1+24=25$$

دائرة مركزها $A_0(2,1)$ و $R=5$

١٤ | دورة ٢٠٠٨ | ٦٠ درجة

في مستوٍ منسوب لدينا دائرة معادلتها

$$x^2+y^2-2x+4y-11=0$$

١) اوجد مركزها واحسب نصف قطرها.

٢) ما الوضع النسبي بين الدائرة والمستقيم

$$3x+4y-10=0$$

الحل: ١)

$$x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4-11=0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=1+4+11=16$$

دائرة مركزها $A_0(1,-2)$ و $R=\sqrt{16}=4$

٢) نوجد l بعد $A_0(1,-2)$ عن المستقيم

$$l=\frac{|3x_0+4y_0-10|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\frac{|3(1)+4(-2)-10|}{\sqrt{9+16}}$$

$$l=\frac{|3-8-10|}{\sqrt{25}}=\frac{|-15|}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$l=3<R=4$$

المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين

١٥ | دورة ٢٠١٠ | ٧٠ درجة

في مستوٍ منسوب الى جملة ماتوسية دائرة معادلتها:

$$x^2+y^2+2x-12y+12=0$$

١) عيّن مركز الدائرة واحسب نصف قطرها.

٢) ما الوضع النسبي لهذه الدائرة والمستقيم الذي معادلته

$$4x-3y-3=0$$

الحل: نتركه للطالب

١٦ | دورة ٢٠١١ الثانية

أوجد معادلة دائرة قطرها $[AB]$ حيث

$A(-1,4)$ و $B(3,6)$

الحل: النموذج: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$$\text{القطر } AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$\text{القطر } AB=\sqrt{(3+1)^2+(6-4)^2}$$

$$\text{القطر}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$$

$$R=\frac{\text{القطر}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

A_0 مركز الدائرة منتصف $[AB]$

$$x_0=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$y_0=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4+6}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$A_0(1,5)$

نعوض:

$$(x-1)^2+(y-5)^2=(\sqrt{5})^2=5$$

١٧ | دورة ٢٠١٦ الأولى ٤٠ درجة

دائرة معادلتها:

$$x^2+y^2-4x-5=0$$

عيّن مركزها واحسب نصف قطرها

الحل: نتركه للطالب

١٨ | دورة ٢٠١٧ الأولى ٦٠ درجة

في مستوٍ مزود بجملة متعامدة نظامية دائرة معادلتها

$$x^2+y^2-4x+8y-5=0$$

١) أوجد مركزها واحسب نصف قطرها.

٢) اثبت أن المستقيم $3x-4y+3=0$ مماس لهذه الدائرة.

الحل: نتركه للطالب

١٩ | دورة ٢٠١٤

لدينا معادلة الدائرة:

$$x^2+y^2-8x-9=0$$

١) عيّن مركزها واحسب نصف قطرها

٢) اثبت أن النقطة $A(0,3)$ من الدائرة واكتب معادلة المماس لها فيها.

الحل: ١)

$$\underset{(4)^2}{x^2-8x+16}-16+y^2-9=0$$

$$(x-4)^2+(y)^2=16+9=25$$

دائرة مركزها $A_0(4,0)$

ونصف قطرها $R=5$

②

$A(0,3)$

$$(0)^2+(3)^2-8(0)-9=0$$

$$9-9=0 \Rightarrow 0=0$$

محقق إذن A تقع على الدائرة.

مشتق:

$$2x+2yy'-8=0$$

نعوض:

$$2(0)+2(3)m=+8$$

$6m=8 \Rightarrow$ ميل المماس $m=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

دستور المماس:

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

$$y-3=\frac{4}{3}(x-0)$$

٢٠ | دورة ٢٠١٦ الثانية

في مستوٍ منسوب أوجد معادلة دائرة مركزها $A_0(-4,2)$ والمستقيم $3x+4y-16=0$ مماس لها.

الحل: الشكل النموذجي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

المستقيم مماس للدائرة لذلك

$$R=l=\frac{|3x_0+4y_0-16|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}$$

$$R=\frac{|3(-4)+4(2)-16|}{\sqrt{9+16}}$$

$$R=\frac{|-12+8-16|}{\sqrt{25}}=\frac{|-20|}{5}=4$$

نعوض:

$$(x+4)^2+(y-2)^2=(4)^2=16$$

٢١ | اوجد معادلة دائرة مركزها $A_0(-2,3)$ ونصف قطرها $R = 4$

الحل: محلول بالكتاب صفحة ٢٦

٢٢ | اوجد معادلة دائرة مركزها $A_0(0,0)$ ونصف قطرها $R = 3$

الحل: محلول بالكتاب صفحة ٢٦

٢٣ | في مستوي دائرة معادلتها

$$x^2+6x+y^2-8y-11=0$$

اوجد مركزها A_0 ونصف قطرها R.

الحل: بالكتاب صفحة ٢٧

٢٤ | في مستوي دائرة معادلتها

$$x^2+y^2+2x-12y+17=0$$

ومستقيم معادلته $x-3y+9=0$

ما وضع المستقيم بالنسبة للدائرة؟

الحل: بالكتاب صفحة ٢٩

٢٥ | في مستوي دائرة معادلتها:

$$x^2+y^2-2x-3=0$$

والمستقيم: $x-3y+9=0$

1) اوجد مركزها ونصف قطرها

2) ما الوضع النسبي بين الدائرة والمستقيم.

٢٦ | في مستوي دائرة:

$$x^2+y^2-8x+4y-5=0$$

والمستقيم $3x-4y+5=0$

ما الوضع النسبي للمستقيم والدائرة

الحل بالكتاب صفحة ٢٠ ـ ٢١

٢٧ | في مستوي دائرة معادلتها:

$$x^2+y^2-4x+2y-20=0$$

والنقاط: $A_1(-1,3)$, $A_2(1,-1)$, $A_3(-4,6)$

1) اوجد الوضع النسبي لكل نقطة مع الدائرة.

2) اوجد معادلة المماس للدائرة في النقطة التي تقع على الدائرة.

الحل: بالكتاب صفحة ٣٢ ـ ٣٣

٢٨ | اوجد معادلة دائرة تمر من النقط $A(0,0)$ و $B(0,1)$ و $C(1,0)$

الحل: الشكل العام: $x^2+y^2+bx+dy+c=0$

$A(0,0): 0+0+0+0+c=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

$B(0,1): 0+1+0+d+0=0 \Rightarrow \boxed{d=1}$

$C(1,0): 1+0+b+0+0=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$

نعوض نجد

$$x^2+y^2-x-y=0$$

الدروس الخاصة: رياضيات وفيزياء وكيمياء

الجلسة ساعة ونصف

تأسيس ومادونه ← طالب واحد ١٥٠٠ ل.س

← طالبين كل طالب ١٠٠٠ ل.س

(في منزل الطالب)

المهندس محمد كريم / درعا

شرق المجمع الحكومي

شمال مدرسة الأندلس

مجموعة الفيس: رفاق كريم

صور الاجابات

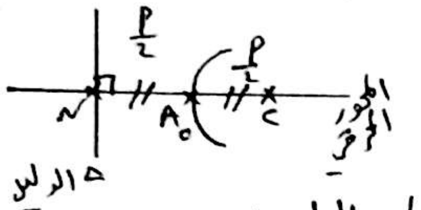
قناة تلغرام: نشرات كريم

تحليل ملفات

وسلامي لكم ....

القطع المكافئ

في القطع المكافئ: المحور المحرقي وجهة التقعر و التغير في احداثيات المحرق ومعادلة الدليل باسم الدرجة الاولى .



$|NA_0| = |A_0C| = \frac{P}{2}$

$\boxed{|NC| = P \text{ الوسيط}}$

داخل التقعر يقع المحرق (C)

وخلف التقعر يقع الدليل Δ

A_0 منتصف المسافة بين المحرق والدليل والمحور المحرقي ⊥ الدليل Δ

أشكال القطع المكافئ عندما ذروته $A_0(0,0)$

الشكل	$y^2=+2Px$	$y^2=-2Px$	$x^2=+2Py$	$x^2=-2Py$
المحور المحرقي	منطبق على xx'	منطبق على xx'	منطبق على yy'	منطبق على yy'
التقعر	نحو x^+	نحو x^-	نحو y^+	نحو y^-
الذروة	$A_0(0,0)$	$A_0(0,0)$	$A_0(0,0)$	$A_0(0,0)$
المحرق	$C(\frac{P}{2},0)$	$C(-\frac{P}{2},0)$	$C(0,+\frac{P}{2})$	$C(0,-\frac{P}{2})$
الدليل Δ	$\Delta: x=-\frac{P}{2}$	$\Delta: x=\frac{P}{2}$	$\Delta: y=-\frac{P}{2}$	$\Delta: y=+\frac{P}{2}$

أشكال القطع المكافئ عندما ذروته $A_0(x_0,y_0)$

الشكل	$(y-y_0)^2=2P(x-x_0)$	$(y-y_0)^2=-2P(x-x_0)$	$(x-x_0)^2=+2P(y-y_0)$	$(x-x_0)^2=-2P(y-y_0)$
المحور المحرقي	xx' //	xx' //	yy' //	yy' //
التقعر	نحو x^+	نحو x^-	نحو y^+	نحو y^-
الذروة	$A_0(x_0,y_0)$	$A_0(x_0,y_0)$	$A_0(x_0,y_0)$	$A_0(x_0,y_0)$
المحرق	$C(x_0+\frac{P}{2},y_0)$	$C(x_0-\frac{P}{2},y_0)$	$C(x_0,y_0+\frac{P}{2})$	$C(x_0,y_0-\frac{P}{2})$
الدليل Δ	$\Delta: x=x_0-\frac{P}{2}$	$\Delta: x=x_0+\frac{P}{2}$	$\Delta: y=y_0-\frac{P}{2}$	$\Delta: y=y_0+\frac{P}{2}$

المماس للقطع المكافئ في نقطة منه A

- نحل مشكلة النقطة.
- نشتق المعادلة
- لحظة التعويض نكتب $y' = m$ ميل المماس

دستور المماس: $y - y_A = m(x - x_A)$

الشكل العام للقطع المكافئ محوره المحرقي xx' //

$$x = ay^2 + by + c$$

الشكل العام للقطع المكافئ محوره المحرقي yy' //

$$y = ax^2 + bx + c$$

نعلم المحرق C والذروة A_0 ونريد معادلة القطع المكافئ:

الحل: نرسم من الرسم نجد المحور المحرقي وجهة التقعر فنكتب الشكل النموذجي الموافق له ومن الرسم نجد $\frac{P}{2} = |A_0C|$. ونعوض في الشكل النموذجي

نعلم الدليل Δ و الذروة A_0

الحل: نرسم من الرسم نجد المحور المحرقي وجهة التقعر فنكتب الشكل النموذجي $\frac{P}{2}$ = (البعد A_0 عن Δ) ثم نعوض في الشكل النموذجي .

نعلم المحرق C والدليل Δ

نفضل الحل حسب التعريف: $M(x,y)$ من القطع المكافئ إذن:

$(CM)^2 = (\text{بعد } M \text{ عن } \Delta)^2 \Rightarrow (CM)^2 =$

- اما $(CM)^2 = (x-a)^2$
- او $(CM)^2 = (y-b)^2$

$\boxed{١}$ في مستوٍ لدينا المعادلة: $x^2+8y=0$

١) اثبت انه قطع مكافئ وعين عناصره المحور المحرقي وجهة التقعر والذروة والوسيط والمحرق والدليل وارسمه.

٢) اوجد معادلة المماس للقطع في نقطة منه A فاصلتها $x=4$.

الحل: ①

$(x)^2=-8(y)$

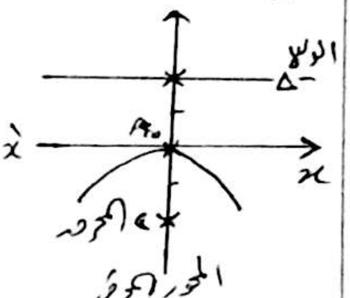
تمثل معادلة قطع مكافئ محوره المحرقي $// yy'$ وتقعره نحو y^- وذروته $A_0(0,0)$

$2P=8 \Rightarrow \boxed{\text{الوسيط } P=\frac{8}{2}=4} \Rightarrow \frac{P}{2}=\frac{4}{2}=2$

المحرق: $c(x_0, y_0-\frac{P}{2})=c(0,-2)$

الدليل: $\Delta: y=y_0+\frac{P}{2}$

$\Delta: y=+2$



② $x=4$

$(4)^2+8y=0$

$8y=-16$

$y=\frac{-16}{8}=-2$

$\boxed{A(4,-2)}$

نشتق المعادلة: $2x+8y'=0$

نعوض:

$2(4)+8m=0 \rightarrow 8m=-8$

ميل المماس $m=\frac{-8}{8}=-1$

دستور المماس: $y-y_A=m(x-x_A)$

نعوض:

$y+2=-1(x-4)$

$\boxed{٣}$ في مستوٍ منسوب لدينا معادلة قطع مكافئ

$y^2+8x-8=0$

١) عين عناصر المحور المحرقي وجهة التقعر.... وارسمه

٢) اوجد معادلة المماس للقطع في نقطة منه ترتيبها $y=4$.

الحل: ①

$(y)^2=-8x+8$

$(y)^2=-8(x-1)$

قطع مكافئ محوره المحرقي $// xx'$

وتقعره نحو x^- وذروته $A_0(1,0)$

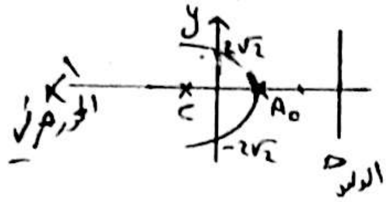
$2P=8 \Rightarrow$ الوسيط $P=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow \frac{P}{2}=\frac{4}{2}=2$

المحرق

$c(x_0-\frac{P}{2}, y_0)$

$\boxed{1-2}$

$c(-1,0)$



الدليل $\Delta: x=x_0+\frac{P}{2}$

$\Delta: x=1+2=3$

② $y=4: (4)^2+8x-8=0$

$8x=-16+8 \Rightarrow 8x=-8 \Rightarrow$

$x=\frac{-8}{8}=-1 \Rightarrow A(-1,4)$

نشتق المعادلة:

$2yy'+8=0$

نعوض:

$2(4)m=-8 \Rightarrow m=\frac{-8}{8}=-1$

دستور المماس: $y-y_A=m(x-x_A)$

نعوض:

$y-4=-1(x+1)$

$\boxed{٢}$ اثبت ان $x^2-2x-4y-7=0$ قطع مكافئ وعين عناصره الذروة والوسيط والمحرق والدليل وارسمه.

الحل: $x^2-2x+1-1-4y-7=0$

$(1)^2$

$(x-1)^2=4y+8$

$(x-1)^2=4(y+2)$

معادلة قطع مكافئ محوره المحرقي $// yy'$ وتقعره نحو y^+ وذروته $A_0(1,-2)$

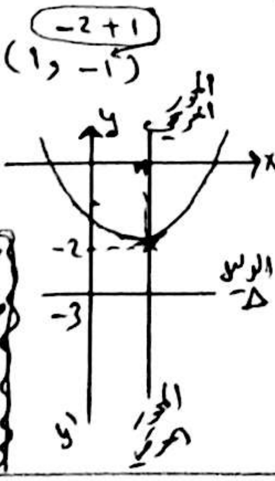
$2P=4 \Rightarrow$ الوسيط $P=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow \frac{P}{2}=\frac{2}{2}=1$

المحرق $c(x_0, y_0+\frac{P}{2})=c(1,-1)$ $\boxed{-2+1}$

الدليل $\Delta: y=y_0-\frac{P}{2}$

$\Delta: y=-2-1=-3$

رسم القطع المكافئ:
• نرسم الذروة ومنها المحور المحرقي
• على طول المحور المحرقي ومنه عند الذروة وبطول $\frac{P}{2}$ نرسم بالاتجاهين نحو المحرق والدليل



٤ قطع مكافئ معادلته $x^2 = 4(x+y)$

المطلوب: ١) عيّن ذروة ووسيط ومحرقه ودليل هذا القطع وارسمه.

دورة ٢٠٠٥
٨٠ درجة

٢) اوجد معادلة المماس له في نقطة منه فاصلتها $x = 0$

الحل: ★

$\boxed{x^2 = 4x + 4y} \Rightarrow x^2 - 4x = 4y$

$x^2 - 4x + 4 - 4 = 4y$ $(2)^2$

$(x-2)^2 = 4y + 4$

$(x-2)^2 = 4(y+1)$

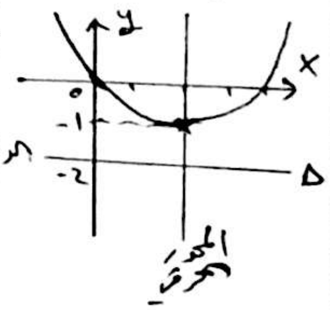
معادلة قطع مكافئ محوره المحرقي // yy' وتقعره نحو y^+ وذروته $A_0(2,-1)$

$2p = 4 \Rightarrow$ الوسيط $p = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{2}{2} = 1$

المحرق $c(x_0, y_0 + \frac{p}{2}) = c(2, 0)$ $-1+1$

الدليل $\Delta : y = y_0 - \frac{p}{2}$

$\Delta : y = -1 - 1 = -2$



② $x = 0$

$(0)^2 = 4(0+y)$

$0 = 4y \Rightarrow y = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow A(0,0)$

نشتق المعادلة ★ : $2x = 4 + 4y'$

نعوض : $2(0) = 4 + 4m \Rightarrow -4 = 4m$

$m = \frac{-4}{4} = -1$

دستور المماس : $y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x}$

٥ دورة ٢٠١٨ الاولى

في مستوٍ منسوب الى جملة متعامدة نظامية

ليكن القطع المكافئ : $y^2 = -4(x+y)$

والمطلوب: ① عيّن محوره المحرقي ووسيطه واحداثيي ذروته ومحرقه واكتب معادلة دليله وارسمه.

② اكتب معادلة المماس له في نقطة منه ترتيبها $y = 0$

الحل: ① ★

$y^2 = -4x - 4y$

$y^2 + 4y + 4 - 4 = -4x$

$(y+2)^2 = -4x + 4$

$(y+2)^2 = -4(x-1)$

قطع مكافئ محوره المحرقي // xx' وتقعره نحو x^- $A_0(1,-2)$

$2p = 4 \Rightarrow$ الوسيط $p = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{2}{2} = 1$

المحرق $c(x_0 - \frac{p}{2}, y_0) = c(0, -2)$ $1-1$

الدليل $\Delta : x = x_0 + \frac{p}{2} = 1 + 1 = 2$

② $y = 0$; $(0)^2 = -4(x+0)$

$0 = -4x \Rightarrow x = \frac{0}{-4} = 0$ $\boxed{A(0,0)}$

نشتق المعادلة ★

$2yy' = -4 - 4y'$

نعوض: $2(0)m = -4 - 4m \Rightarrow 4m = -4$

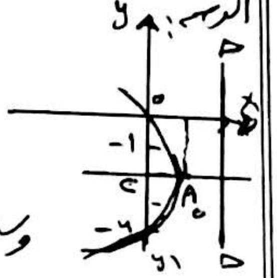
$m = \frac{-4}{4} = -1$

$y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 0 = -1(x - 0)$

$y = -x$

الرسم:



[illegible]

٦ مثال محلول بالكتاب صفحة ٤١

في مستوٍ قطع مكافئ معادلته $y^2 - 8x = 0$

بيّن انه قطع مكافئ وعيّن عناصره: الذروة - الوسيط - المحرق - الدليل وارسمه

الحل بالكتاب صفحة ٤١

٧ مثال محلول بالكتاب صفحة ٤٢

في مستوٍ منسوب قطع مكافئ معادلته:

$x^2 + 2x + 12y - 11 = 0$

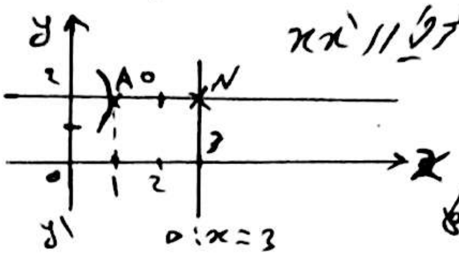
١) اثبت انه قطع مكافئ وعيّن عناصره: الذروة - الوسيط - المحرق - الدليل

٢) اوجد معادلة المماس له في النقطة $N(1, \frac{2}{3})$ منه.

الحل: بالكتاب صفحة ٤٢

٨ أوجد معادلة قطع مكافئ إذا كانت ان ذروته $A_0(1,2)$ ودليله $\Delta: x-3=0$

الحل: نرسم الدليل $\Delta: x=3$ // yy' ويمر من $(3,0)$ ونرسم $A_0(1,2)$ نجد المحور المحرقي // xx' وتقعره نحو x^- مفهوم من الشكل



$$(y-y_0)^2=-2P(x-x_0)$$

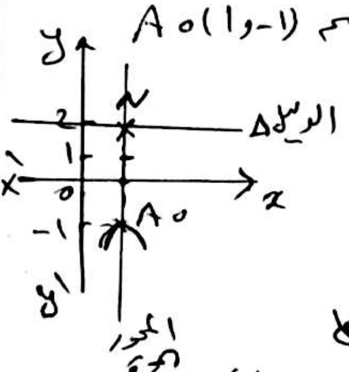
$$\frac{P}{2}=|A_0N|=2 \Rightarrow P=4 \Rightarrow 2P=8$$

نعوض:

$$(y-2)^2=-8(x-1)$$

٩ أوجد معادلة قطع مكافئ إذا كانت ان ذروته $A_0(1,-1)$ ودليله $\Delta: y-2=0$.

الحل: نرسم الدليل $\Delta: y=2$ // xx' ويمر من $(0,2)$ ونرسم $A_0(1,-1)$ ومن الرسم نجد أن المحور المحرقي // yy' وتقعره نحو y^- مفهوم من الشكل



$$(x-x_0)^2=-2P(y-y_0)$$

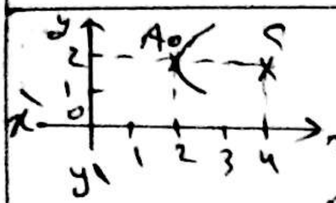
$$\frac{P}{2}=|A_0N|=3 \Rightarrow P=6 \Rightarrow 2P=12$$

نعوض:

$$(x-1)^2=-12(y+1)$$

١٠ أوجد معادلة قطع مكافئ إذا كانت ان ذروته $A_0(2,2)$ ومحرقه $C(4,2)$

الحل: نرسم A_0 و C نجد ان المحور المحرقي // xx' وتقعره نحو x^+ مفهوم من الشكل :



$$(y-y_0)^2=2P(x-x_0)$$

$$\frac{P}{2}=|A_0C|=2$$

$$P=4 \Rightarrow 2P=8$$

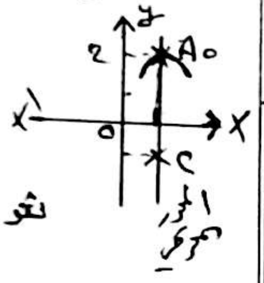
نعوض:

$$(y-2)^2=+8(x-2)$$

١١ أوجد معادلة قطع مكافئ إذا كانت أن ذروته $A_0(1,2)$ ومحرقه $C(1,-1)$

الحل: نرسم A_0 و C نجد أن المحور المحرقي // yy' وتقعره نحو y^- مفهوم من الشكل

$$(x-x_0)^2=-2P(y-y_0)$$



$$\frac{P}{2}=|A_0C|=3$$

$$P=2(3)=6$$

$$2P=2(6)=12$$

نعوض:

$$(x-1)^2=-12(y-2)$$

١٢ أوجد معادلة قطع مكافئ محرقه $C(-1,1)$ ودليله $\Delta: y=3$

الحل: دليل ومحرق حسب التعريف للقطع المكافئ نأخذ $M(x,y)$ من القطع فإن:

$CM =$ بعد M عن الدليل Δ

$$(CM)^2=(y-3)^2$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2=(y-3)^2$$

ننشر الأقواس y :

$$(x+1)^2+y^2-2y+1=y^2-6y+9$$

$$(x+1)^2=-6y+2y+9-1$$

$$(x+1)^2=-4y+8$$

$$(x+1)^2=-4(y-2)$$

١٣ أوجد معادلة قطع مكافئ محرقه $C(1,2)$ ودليله $\Delta: y=0$ أي دليله المحور xx'

الحل: دليل ومحرق حسب التعريف للقطع المكافئ نفرض $M(x,y)$ من القطع فإن:

$CM = \Delta$ بعد M عن الدليل $\Rightarrow (CM)^2 = (y-0)^2$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (y)^2$$

ننشر أقواس y نجد:

$$(x-1)^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2$$

$$(x-1)^2 = \underset{4}{4y} - \underset{4}{4} \Rightarrow (x-1)^2 = 4(y-1)$$

١٤ أوجد معادلة قطع مكافئ محرقه $C(-1,0)$ ودليله $\Delta: x+3=0$

الحل: دليل ومحرق حسب التعريف للقطع المكافئ نفرض $M(x,y)$ من القطع المكافئ فإن:

$CM = \Delta$ بعد M عن الدليل $\Rightarrow (CM)^2 = (x+3)^2$

$$(x+1)^2 + (y-0)^2 = (x+3)^2$$

ننشر أقواس x نجد:

$$x^2 + 2x + 1 + (y)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(y)^2 = 6x - 2x + 9 - 1$$

$$(y)^2 = \underset{4}{4x} + \underset{4}{8} \Rightarrow (y)^2 = 4(x+2)$$

١٥ أوجد معادلة قطع مكافئ محرقه $C(1,2)$ ودليله $\Delta: x=0$ أي دليله المحور yy'

الحل: دليل ومحرق حسب التعريف للقطع المكافئ نفرض $M(x,y)$ من القطع المكافئ فإن:

$CM = \Delta$ بعد M عن الدليل $\Rightarrow (CM)^2 = (x-0)^2$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x)^2$$

ننشر أقواس x نجد:

$$x^2 - 2x + 1 + (y-2)^2 = x^2$$

$$(y-2)^2 = \underset{2}{2x} - \underset{2}{1}$$

$$(y-2) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

١٦ في مستوٍ محدث بجملة قانونية أوجد معادلة قطع مكافئ محرقه $C(4,-1)$ وذروته $A_0(2,-1)$

الحل: بالكتاب صفحة ٤٤ أو كما مثال ١٠ ١١

١٧ في مستوٍ محدث بجملة قانونية أوجد معادلة قطع مكافئ محرقه $C(-2,3)$ ودليله $\Delta: y=+1$

الحل: بالكتاب صفحة ٤٥

يفضل أن يتم الحل مثل التمرين ١٣ و١٢ و١٤ و١٥

١٨ في مستوٍ محدث أوجد معادلة قطع مكافئ ذروته $A_0(-1,2)$ ودليله $\Delta: x-2=0$

الحل بالكتاب صفحة ٤٦ أو كما مثال ٨ ٩

١٩ في مستوٍ محدث أوجد معادلة قطع مكافئ يمر بالنقاط $(0,0)$ و $(2,0)$ ، $(-1,3)$ ومحوره المحرقي $\parallel yy'$

الحل: بما أن المحور المحرقي $\parallel yy'$ فالشكل العام هو:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$(0,0): 0 = 0 + 0 + c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

$$(2,0): 0 = 4a + 2b \Rightarrow b = -2a \cdots ①$$

$$(-1,3): 3 = a + b(-1) \Rightarrow 3 = a - b \cdots ②$$

نعوض ١) في ٢) نجد:

$$3 = a - (-2a) \Rightarrow 3 = 3a$$

$$a = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow b = -2(1) = -2$$

إذن معادلة القطع المكافئ: $y = x^2 - 2x$

٢٠ اكتب معادلة قطع مكافئ محوره المحرقي $\parallel xx'$ ويمر بالنقاط $A(-1,2)$ ، $B(-2,0)$ و $C(-5,6)$

الحل: بالكتاب صفحة ٤٧

٢١ دورة ٢٠١١ الأولى

أوجد معادلة قطع مكافئ محرقه $C(-2,3)$ ودليله $\Delta: y=1$ ثم ارسمه.

لأنه بإمكان الطالب أن يحل أي مسألة قطع مكافئ من الكتاب أو دورة أو...

مع تحيات المهندس محمد كريم

القطع الناقص

القطع الناقص: مجموعة نقط هذا المستوي التي يكون مجموع بعديها كلاً منها عن نقطتين ثابتتين c و c' (المحرقين) يساوي بعداً ثابتاً قدره ($2B$).

c و c' المحرقين	a و a' الذروتين المحرقيتين
b و b' الذروتين اللامحرقيتين	A_0 مركز القطع الناقص

$cc' = 2D$ حيث cc' البعد المحرقي.

$aa' = 2B$ حيث aa' القطر الأكبر.

$bb' = 2G$ حيث bb' القطر الصغير.

A_0 و a و a' و c و c' نقاط تقع على المحور المحرقي

A_0 و b و b' نقاط تقع على المحور اللامحرقي

مساحة القطع الناقص $S = \pi B G$

الدائرة الأصلية مركزها مركز القطع $A_0(x_0, y_0)$ ونصف قطرها B.

الدائرة الثانوية: مركزها مركز القطع $A_0(x_0, y_0)$ ونصف قطرها G.

الشكل النموذجي:

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2} + \frac{(y-y_0)^2}{G^2} = 1$$

قطع ناقص محوره المحرقي // xx'

ومركز القطع $A_0(x_0, y_0)$

لكن: $D^2 = B^2 - G^2$

$a'(x_0 - B, y_0)$	$a(x_0 + B, y_0)$
$c'(x_0 - D, y_0)$	$c(x_0 + D, y_0)$
$b'(x_0, y_0 + b)$	$b(x_0, y + G)$

r و r' هما نصفا القطرين المحرقيين المحور المحرقي // xx'

$$r = B + \frac{D(x-x_0)}{B}$$

$$r' = B - \frac{D(x-x_0)}{B}$$

الشكل النموذجي:

$$\frac{(y-y_0)^2}{B^2} + \frac{(x-x_0)^2}{G^2} = 1$$

قطع ناقص محوره المحرقي // yy'

ومركز القطع $A_0(x_0, y_0)$

لكن: $D^2 = B^2 - G^2$

$a'(x_0, y_0 - B)$	$a(x_0, y_0 + B)$
$c'(x_0, y_0 - D)$	$c(x_0, y_0 + D)$
$b'(x_0 - b, y_0)$	$b(x_0 + b, y_0)$

r و r' هما نصفا القطرين المحرقيين المحور المحرقي // yy'

$$r = B + \frac{D(y-y_0)}{B}$$

$$r' = B - \frac{D(y-y_0)}{B}$$

رسم القطع الناقص:

- نرسم مركز القطع الناقص ومنه المحور المحرقي واللامحرقي
- من مركز القطع وعلى طول المحور المحرقي وبطول B نرسم بالاتجاهين فنحصل على الذروتين المحرقيتين a و a'
- من مركز القطع وعلى طول المحور المحرقي وبطول D نرسم بالاتجاهين فنجد المحرقين c' و c
- من مركز القطع وعلى طول المحور اللامحرقي وبطول G نرسم بالاتجاهين فنجد الذروتين اللامحرقيتين b و b'.

رسم القطع الزائد والمقاربين.

- نرسم مركز القطع الناقص ومنه المحور المحرقي.
- من مركز القطع وعلى طول المحور المحرقي وبطول B نرسم بالاتجاهين فنحصل على الذروتين المحرقيتين a و a'
- من مركز القطع وعلى طول المحور المحرقي وبطول D نرسم بالاتجاهين نجد c و c'
- من a وبشكل عمودي على المحور المحرقي نأخذ طول G بالاتجاهين فنجد نقطتين نصل كلاً منهما إلى مركز القطع فنجد المقاربين.

$\boxed{1}$ قطع ناقص معادلته :

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

١) اوجد محوره المحرقي ومركزه وعناصره B و G و D وارسمه.

٢) احسب مساحة القطع.

٣) عيّن ما له من ذرى ومحاوره

٤) احسب r و r' من اجل $x=3,5$

الحل: ① قطع ناقص محوره المحرقي $//\ xx'$ مركزه $A_0(1,-1)$

$B^2=25 \Rightarrow B=\sqrt{25}=5$

$G^2=9 \Rightarrow G=\sqrt{9}=3$

لكن $D^2=B^2-G^2=25-9=16 \Rightarrow D=4$

②

$S=\pi BG$

$S=\pi(5)(3)=15\pi$

③

$\boxed{1+5}$

$a(x_0+B,y_0)=a(6,-1)$

$\boxed{1-5}$

$a'(x_0-B,y_0)=a'(-4,-1)$

$\boxed{1+4}$

$c(x_0+D,y_0)=c(5,-1)$

$\boxed{1-4}$

$c'(x_0-D,y_0)=c'(-3,-1)$

$\boxed{-1+3}$

$b(x_0,y_0+G)=b(1,+2)$

$\boxed{-1-3}$

$b'(x_0,y_0-G)=b'(1,-4)$

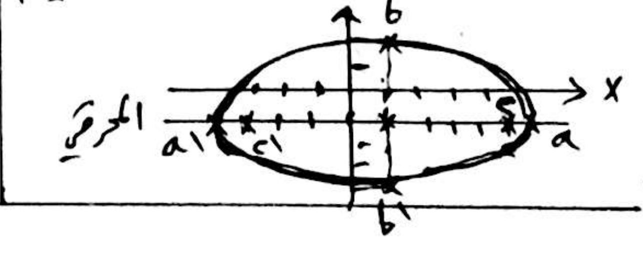
④

$$r=B+\frac{D(x-x_0)}{B}=5+\frac{4(3,5-1)}{5}$$

$r=5+\frac{10}{5}=5+2=7$

$r'=\dots\dots=5-2=3$

الرسم :



$\boxed{2}$ قطع ناقص معادلته

$$\frac{y^2}{9}+\frac{(x-2)^2}{4}=1$$

١) اوجد محوره المحرقي ومركزه وعناصره B و G و D وارسمه.

٢) احسب مساحة القطع

٣) عيّن ما له من ذرى ومحاوره.

٤) احسب r و r' عندما $y=3$

الحل: ① قطع ناقص محوره المحرقي $//\ yy'$ ومركز القطع

$A_0(2,0)$

$B^2=9 \xrightarrow{\quad} B=3$

$G^2=4 \xrightarrow{\quad} G=2$

لكن $D^2=B^2-G^2=9-4=5 \Rightarrow D=\sqrt{5}$

② مساحة القطع $S=\pi BG$

$S=\pi(3)(2)=6\pi$

③

$\boxed{0+3}$

$a(x_0,y_0+B)=a(2,3)$

$\boxed{0-3}$

$a'(x_0,y_0-B)=a'(2,-3)$

$\boxed{0+\sqrt{5}}$

$c(x_0,y_0+D)=c(2,\sqrt{5})$

$\boxed{0-\sqrt{5}}$

$c'(x_0,y_0-D)=c'(2,-\sqrt{5})$

$\boxed{2+2}$

$b(x_0+G,y_0)=b(4,0)$

$\boxed{2-2}$

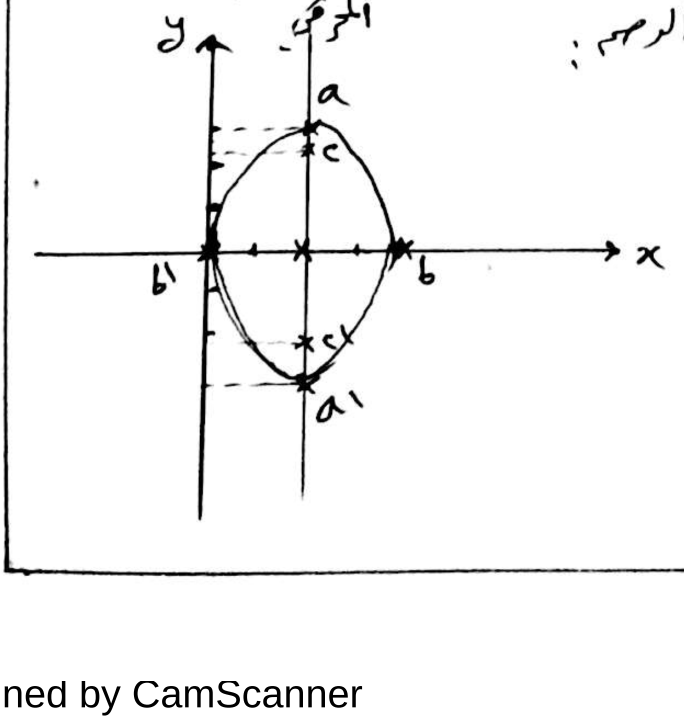
$b'(x_0-G,y_0)=b'(0,0)$

④

$$r=B+\frac{D(y-y_0)}{B}=3+\frac{\sqrt{5}(3-0)}{3}=3+\sqrt{5}$$

$$r'=B-\frac{D(y-y_0)}{B}=3-\frac{\sqrt{5}(3-0)}{3}=3-\sqrt{5}$$

الرسم :



٣ في مستوٍ منسوب مجموعة نقط معادلتها :

$$4x^2+9y^2-36=0$$

١) بيّن انه قطع ناقص وعيّن A_0 و B و G و D

٢) احسب مساحة القطع الناقص وارسم القطع.

٣) عيّن احداثيات كل من ذراه ومحارقه.

٤) اكتب المعادلة الاصلية للقطع.

٥) اكتب دستوري نصفي القطرين المحرقيين لهذا القطع في هذه الحالة.

الحل: ١)

$$4x^2+9y^2=36$$

نقسم على 36 نجد :

$$\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=1 \longrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

قطع ناقص محوره المحرقي // $x'x$

مركز القطع $A_0(0,0)$

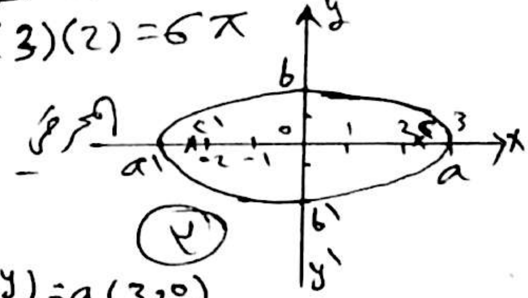
$B^2=9 \Rightarrow B=3$ و $G^2=4 \Rightarrow G=2$

لكن $D^2=B^2-G^2=9-4=5 \Rightarrow D=\sqrt{5}$

٢) مساحة القطع

$S=\pi B\cdot G$

$S=\pi(3)(2)=6\pi$



③

$a(x_0+B,y_0)=a(3,0)$

$a'(x_0-B,y_0)=a'(-3,0)$

$c(x_0+D,y_0)=c(\sqrt{5},0)$

$c'(x_0-D,y_0)=c'(-\sqrt{5},0)$

$b(x_0,y_0+G)=b(0,2)$

$b'(x_0,y_0-G)=b'(0,-2)$

⑤

$$r=B+\frac{D(x-x_0)}{B}$$

$$r'=B-\frac{D(x-x_0)}{B}$$

٤) المعادلة الاصلية مركزها $A_0(0,0)$ مركز القطع ونصف قطرها $B=3$ اذن

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(3)^2=9$$

٤ في مستوٍ منسوب مجموعة نقط معادلتها

$$25x^2+9y^2-225=0$$

١) بيّن انه قطع ناقص وعيّن A_0 و B و G و D

٢) عيّن احداثيات كل من ذراه ومحارقه.

٣) احسب مساحة القطع الناقص وارسمه.

٤) اكتب المعادلة الثانوية للقطع.

٥) اكتب دستوري r و r' لهذا القطع.

الحل: ١)

$$25x^2+9y^2=225$$

نقسم على 225 نجد :

$$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

قطع ناقص محوره المحرقي // yy' ومركز القطع $A_0(0,0)$

$B^2=25 \Rightarrow B=\sqrt{25}=5$

$G^2=9 \Rightarrow G=\sqrt{9}=3$

لكن $D^2=B^2-G^2=25-9=16 \Rightarrow D=4$

٢)

$a(x_0,y_0+B)=a(0,5)$

$a'(x_0,y_0-B)=a'(0,-5)$

$c(x_0,y_0+D)=c(0,+\sqrt{5})$

$c'(x_0,y_0-D)=c'(0,-\sqrt{5})$

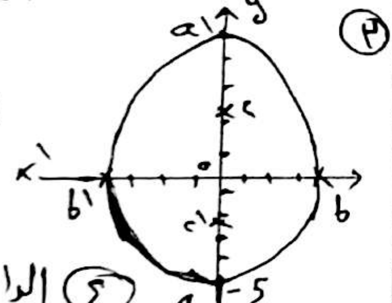
$b(x_0+G,y_0)=b(3,0)$ و $b'(-3,0)$

③

$S=\pi B\cdot G$

$S=\pi(5)(3)$

$S=15\pi$



④ الدائرة الثانوية

مركزها مركز القطع

قطرها $G=3$ اذن

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(3)^2=9$$

⑤

$$r=B+\frac{D(y-y_0)}{B}$$

$$r'=B-\frac{D(y-y_0)}{B}$$

٥ في مستوٍ منسوب لدينا:

$4x^2+9y^2-16x-20=0$

بيّن أنها تمثل قطع ناقص وعيّن عناصره O و B و G و D وإحداثيات ما له من ذرا وبؤر.

الحل: نرتّب

$\underline{4x^2-16x}+9y^2-20=0$

$4(x^2-4x+4-4)+9y^2-20=0$

$4(x-2)^2+9(y)^2=16+20=36$

نقسم على 36 نجد:

$$\frac{4(x-2)^2}{36}+\frac{9(y)^2}{36}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y)^2}{4}=1$$

قطع ناقص محوره المحرقي xx' //

ومركز القطع $A_0(2,0)$

$B^2=9\Rightarrow B=\sqrt9=3$

$G^2=4\Rightarrow G=\sqrt4=2$

لكن: $D^2=B^2-G^2=9-4=5\Rightarrow D=\sqrt5$

$a(x_0+B,y_0)=a(\overset{2+3}{5},0)$

$a'(x_0-B,y_0)=a'(-1,0)$ $\boxed{2-3}$

$c(x_0+D,y_0)=c(2+\sqrt5,0)$

$c'(x_0-D,y_0)=c'(2-\sqrt5,0)$

$b(x_0,y_0+G)=b(3,2)$ $\boxed{0+2}$

$b'(x_0,y_0-G)=b'(3,-2)$ $\boxed{0-2}$

٦ في مستوٍ منسوب لدينا مجموعة النقط معادلتها $4x^2+y^2-8x-4y+4=0$ بيّن أنها تمثل قطع ناقص وعيّن عناصره المحور المحرقي ومركزه O و B و G و D واحسب مساحته واكتب معادلة الدائرة الأصلية ثم معادلة الدائرة الثانوية

الحل: نرتّب:

$\underline{4x^2-8x}+\underline{y^2-4y}+4=0$

$4(x^2-2x+1-1)+y^2-4y+4-4+4=0$

$4(x-1)^2+(y-2)^2=4$

نقسم على 4 نجد:

$$\frac{4(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

قطع ناقص محوره المحرقي yy' //

مركز القطع $A_0(1,2)$

$B^2=4\Rightarrow B=2$ و $G^2=1\Rightarrow G=1$

لكن: $D^2=B^2-G^2=4-1=3\Rightarrow D=\sqrt3$

مساحة القطع: $S=\pi B\cdot G$

$S=\pi(2)(1)=2\pi$

الأصلية مركزها $A_0(1,2)$ ونصف قطرها $B=2$:

$(x-1)^2+(y-2)=4$

الثانوية مركزها $A_0(1,2)$ ونصف قطرها $G=1$:

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

٧ اثبت أن النقطة $A(3,1)$ تقع على القطع الناقص وأوجد معادلة المماس فيه حيث معادلة القطع الناقص:

$2x^2+4x+y^2+2y=33$

الحل:

$A(3,1): 2(3)^2+4(3)+(1)^2+2(1)=33$

$18+12+1+2=33\Rightarrow33=33$

محققة إذن A من القطع الناقص

نشتق معادلة القطع

$4x+4+2yy'+2y'=0$

$4(3)+4+2(1)m+2m=0$

$4m=-16\Rightarrow$ ميل المماس $m=\frac{-16}{4}=-4$

دستور المماس: $y-y_0=m(x-x_0)$

نعوض: $y-1=-4(x-3)$

٨ في مستوٍ منسوب معادلة قطع ناقص:

$9x^2+25y^2+36x-50y-839=0$

١) أوجد المحور المحرقي و A_0 و B و G و D وإحداثيات كل من ذراه وبؤره وارسمه

٢) احسب r و r' عند نقطة للقطع $x=8$

الحل: بالكتاب صفحة ٥٧

٩) أوجد معادلة قطع ناقص محوره المحرقي // xx' و القطر الكبير $aa'=10$ و البعد المحرقي $cc'=8$ ومركزه $A_0(-1,3)$

الحل: بما أن المحور المحرقي // xx' فهو من الشكل:

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2}+\frac{(y-y_0)^2}{G^2}=1$$

$aa'=2B=10 \Rightarrow B=\frac{10}{2}=5$

$cc'=2D=8 \Rightarrow D=\frac{8}{2}=4$

لكن: $D^2=B^2-G^2$

$16=25-G^2 \Rightarrow G^2=25-16=9$

نعوض:

$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

١٠) أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $A_0(2,-1)$ ومحوره المحرقي // yy' و $bb'=8$ ، $D=3$

الحل: بما أن المحور المحرقي // yy' فهو من الشكل:

$$\frac{(y-y_0)^2}{B^2}+\frac{(x-x_0)^2}{G^2}=1$$

$bb'=2G=8 \Rightarrow G=\frac{8}{2}=4$ و $D=3$

لكن: $D^2=B^2-G^2$

$9=B^2-16 \Rightarrow 9+16=B^2 \Rightarrow B^2=25$

نعوض:

$$\frac{(y+1)^2}{25}+\frac{(x-2)^2}{16}=1$$

١١) أوجد معادلة قطع ناقص محوره المحرقي // xx' و $2D=2\sqrt{3}$ ودائرته الأصلية $(x+2)^2+(y+3)^2=4$

الحل: بما أن المحور المحرقي // xx' فهو من الشكل:

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2}+\frac{(y-y_0)^2}{G^2}=1$$

$2D=2\sqrt{3} \Rightarrow D=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

الأصلية مركزها $A_0(-2,-3)$ مركز القطع

ونصف قطرها $B^2=4$

$B=2$

لكن: $D^2=B^2-G^2$

$(\sqrt{3})^2=(2)^2-G^2 \Rightarrow G^2=4-3=1$

نعوض:

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{1}=1$$

١٢) أوجد معادلة قطع ناقص محوره المحرقي // yy' وطول قطره الكبير $=6$ ودائرته الثانوية: $x^2+(y-1)^2=4$

الحل: بما أن المحور المحرقي // yy' فهو من الشكل:

$$\frac{(y-y_0)^2}{B^2}+\frac{(x-x_0)^2}{G^2}=1$$

قطره الكبير $aa'=2B=6 \Rightarrow B=3$

الثانوية مركزها $A_0(0,1)$ مركز القطع

ونصف قطرها $G^2=4 \Rightarrow G=2$

نعوض:

$$\frac{(y-1)^2}{9}+\frac{(x-0)^2}{4}=1$$

١٣) أوجد معادلة قطع ناقص محوره المحرقي // xx' و $aa'=6$ ومركزه $A_0(-2,-3)$ ومساحة القطع $S=6\pi$

الحل: بما أن المحور المحرقي // xx' فهو من الشكل:

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2}+\frac{(y-y_0)^2}{G^2}=1$$

$aa'=2B=6 \Rightarrow B=\frac{6}{2}=3$

$S=\pi B G$

$6\pi=\pi(3)G \Rightarrow G=\frac{6\pi}{3\pi}=2$

نعوض:

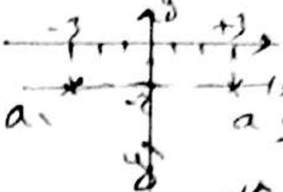
$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

المهندس محمد كريم

درعا - شرق المجمع الحكومي - شمال مديرية الاسكان

١٤ | دورة ٢٠٠٧ | ١٠٠ درجة

اوجد معادلة القطع الناقص المرسوم في مستوٍ منسوب إلى معلم متجانس إذا علم ذروتاه $a'(-3,-2)$ و $a(3,-2)$ والبعد المحرقي $2D=2\sqrt{5}$ ثم أوجد مساحته.



الحل: نرسم a و a' المحور المحرقي // xx' فهو من الشكل:

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2}+\frac{(y-y_0)^2}{G^2}=1$$

$$aa'=2B=6 \Rightarrow B=\frac{6}{2}=3$$

$$2D=2\sqrt{5} \Rightarrow D=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

لكن $D^2=B^2-G^2 \Rightarrow 5=9-G^2$

$$G^2=9-5=4 \Rightarrow G=2$$

مركز القطع A_0 منتصف $[a'a]$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0=\frac{x_{a'}+x_a}{2}=\frac{-3+3}{2}=\frac{0}{2}=0 \\ y_0=\frac{y_{a'}+y_a}{2}=\frac{-2-2}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_0(0,-2)$$

نعوض:

$$\frac{(x-0)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

مساحة القطع:

$$S=\pi B G$$

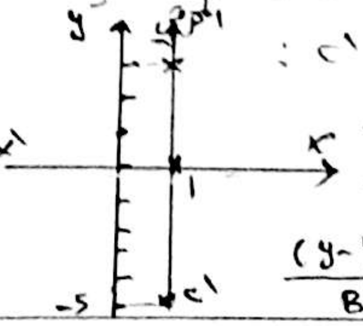
$$S=\pi(3)(2)=6\pi$$

١٥ | دورة ٢٠٠٩ | ٨٠ درجة

في مستوٍ محدث قطع ناقص محرقاه هما: $c'(1,-5)$ و $c(1,3)$ و $2B=10$

١) اوجد معادلة هذا القطع وارسمه واحسب مساحته.

٢) اوجد معادلة دائرته الأصلية.



الحل: نرسم c و c': نجد ان المحور المحرقي // yy' فمعادلته من الشكل:

$$\frac{(y-y_0)^2}{B^2}+\frac{(x-x_0)^2}{G^2}=1$$

$$cc'=2D=8 \Rightarrow D=\frac{8}{2}=4$$

$$2B=10 \Rightarrow B=\frac{10}{2}=5$$

لكن $D^2=B^2-G^2 \Rightarrow 16=25-G^2$

$$G^2=25-16=9 \Rightarrow G=3$$

A_0 منتصف $[cc']$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=\frac{x_{c'}+x_c}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1 \\ y_0=\frac{y_{c'}+y_c}{2}=\frac{-5+3}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$A_0(1,-1)$$

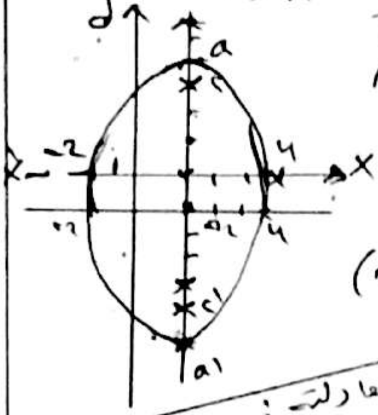
نعوض:

$$\frac{(y+1)^2}{25}+\frac{(x-1)^2}{9}=1$$

مساحة القطع

$$S=\pi B G \Rightarrow S=\pi(5)(3)$$

$$S=15\pi$$



٢) الدائرة المطلوبة مركزها $A_0(1,-1)$ ونصف قطرها $B=5$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=25$$

١٦ قطع ناقص معادلته:

$$3x^2+2y^2+6x+2y-28=0$$

اثبت ان النقطة $N(2,1)$ منه واكتب معادلة المماس فيها:

الحل:

$$N(2,1):\ 3(4)+2(1)+6(2)+2(1)-28$$

$$12+2+12+2-28=0 \Rightarrow 0=0$$

محققة N من القطع

نشتق:

$$6x+4yy'+6+2y'=0$$

نعوض:

$$6(2)+\underline{4(1)m}+6+\underline{2m}=0$$

$$6m=-18 \Rightarrow m=\frac{-18}{6}=-3$$

دستور المماس:

$$y-y_N=m(x-x_N)$$

نعوض:

$$y-1=-3(x-2)$$

بإمكان الطالب أن يحل أي تمرين مماثل لما سبق

١٧ في مستوٍ منسوب قطع ناقص معادلته
$9x^2+25y^2+36x-50y-839=0$

١) أوجد عناصره: محوره المحرقي ومركزه O و B و G و D وارسمه.

٢) أوجد إحداثيات كل من ذروتيه ومحرقيه.

٣) احسب r و r' عند نقطة من القطع فاصلتها $x=8$.

الحل: في الكتاب صفحة ٥٧

١٨ أوجد معادلة قطع ناقص إذا علمت أن محوره المحرقي // xx' و: $D=4$
و $B=5$ ومركز القطع $A_0(6,-2)$

الحل: بالكتاب صفحة ٥٥

١٩ أوجد معادلة قطع ناقص إذا علمت أن محوره المحرقي yy' و $D=3$
ودائرته الأصلية $x^2+y^2=16$

الحل: بالكتاب صفحة ٥٥

٢٠ أوجد معادلة قطع ناقص محوره المحرقي هو yy' و $D=12$
ودائرته الثانوية: $x^2+y^2=25$

الحل: بالكتاب صفحة ٥٦

٢١ أوجد معادلة قطع ناقص محوره المحرقي // xx' ومركزه $A_0(2,3)$
ومساحة القطع $S=\frac{15\pi}{2}$
و $G=1$

الحل: بالكتاب صفحة ٥٦

٢٣ أوجد معادلة القطع الناقص علماً أن الذروتان:
$a(3,-2)$ و $a'(-3,-2)$
والبعد المحرقي: $2D=2\sqrt{5}$

الحل: ← في الكتاب صفحة ٥٩
← نفس حل دورة ٢٠٠٧

٢٢ أوجد معادلة قطع ناقص علماً أن البعد المحرقي يساوي 8 والذروتان على **المحور اللامحرقي** هما
$b(6,1)$ و $b'(0,1)$

الحل: بالكتاب صفحة ٥٩ و ٦٠

٢٤ أوجد معادلة قطع ناقص محرقاه هما $c(2,3)$ و $c'(2,-5)$ ، $2B=10$

الحل: بالكتاب صفحة ٦٠

٢٥ دورة ٢٠١٠

في مستوٍ منسوب إلى جملة قانونية قطع ناقص محرقاه هما:
$c(3,1)$ و $c'(-5,1)$ و $2B=10$

① اكتب معادلة هذا القطع وارسمه.

② أوجد مساحة هذا القطع الناقص.

الحل: بإمكان الطالب حله كما سبق من تمارين

٢٦ في مستوٍ منسوب إلى جملة متعامدة نظامية مجموعة نقاط:
$4x^2+9y^2-16x-20=0$
بيّن أن هذه النقاط تمثل قطعاً ناقصاً، ثم عيّن عناصره محوره المحرقي ومركزه و B و G و D وإحداثيات محرقيه.

تعريف القطع الزائد : مجموعة نقط هذا المستوي التي يكون فرق بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين هما المحرقين c و c' يساوي عدداً ثابتاً قدره 2B .

A_0 مركز القطع فمنتصف $\begin{cases} cc' \\ aa' \end{cases}$

$a'a = 2B$ $cc' = 2D$

a و a' و c و c' على المحور المحرقي

الشكل النموذجي :

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2} - \frac{(y-y_0)^2}{G^2} = 1$$

قطع زائد محوره المحرقي // xx' ومركز القطع $A_0(x_0, y_0)$

الذروتين المحرقيتين هما :

$a(x_0+B, y_0)$

$a'(x_0-B, y_0)$

المحرقين هما :

$c(x_0+D, y_0), c'(x_0-D, y_0)$

نصفي القطرين المحرقيين :

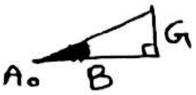
$$r = \left|B + \frac{D(x-x_0)}{B}\right|$$

$$r' = \left|B - \frac{D(x-x_0)}{B}\right|$$

علاقة هامة في القطع الزائد : $\boxed{D^2 = B^2 + G^2}$ لكن

المقاربين يمران من مركز القطع $A_0(x_0, y_0)$

وميل كل منهما : $\boxed{m = \pm\frac{G}{B}}$



الميل هو الظل والظل هو المقابل ع المجاورة

معادلة المقاربين : $y - y_0 = \mp \frac{G}{B}(x - x_0)$

الشكل النموذجي : $\frac{(y-y_0)^2}{B^2} - \frac{(x-x_0)^2}{G^2} = 1$

قطع زائد محوره المحرقي // yy' ومركز القطع $A_0(x_0, y_0)$

الذروتين المحرقيتين :

$a(x_0, y_0+B)$ و $a'(x_0, y_0-B)$

المحرقين : $c(x_0, y_0+D), c'(x_0, y_0-D)$

نصفي القطرين المحرقيين :

$$r = \left|B + \frac{D(y-y_0)}{B}\right|$$

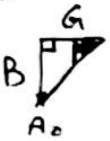
$$r' = \left|B - \frac{D(y-y_0)}{B}\right|$$

علاقة هامة في القطع الزائد : $\boxed{D^2 = B^2 + G^2}$ لكن

المقاربين يمران من مركز القطع $A_0(x_0, y_0)$

وميل كل منهما

$m = \frac{\mp B}{G}$



الميل هو الظل والظل هو المقابل ع المجاورة

معادلة المقاربين :

$$y - y_0 = \pm\frac{B}{G}(x - x_0)$$

علاقة هامة للقطع الزائد المتساوي الساقين

$$B^2 = G^2 = \frac{D^2}{2}$$

رسم القطع الزائد :

- نرسم مركز القطع A_0 ومنه المحور المحرقي .
- من مركز القطع وعلى طول المحور المحرقي وبطول B نرسم بالاتجاهين فنجد a و a'
- من مركز القطع وعلى طول المحور المحرقي وبطول D نرسم بالاتجاهين فنجد c و c'

A_0 منتصف $[a'a]$ و ; $a'a = 2B$

A_0 منتصف $[c'c]$ و ; $c'c = 2D$

إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة :

$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ و $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$

أوجد إحداثيي A_0 منتصف $a'(-3,4)$ $a(1,2)$

الحل :

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

إذن $A_0(-1,3)$

① في مستوٍ منسوب لدينا

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

١) ما نوع القطع وأوجد عناصره A_0 و B و G و D

٢) أوجد إحداثيي كل من ذروتيه ومحرقيه.

٣) أوجد طولي نصفي قطريه المحرقيين من أجل $x=0$

٤) أوجد معادلتي مقاربيه

الحل: ١) قطع زائد محوره المحرقي // xx'

ومركز القطع $A_0(3,-2)$

$B^2=9 \Rightarrow B=3$ $G^2=16 \Rightarrow G=4$

لكن $D^2=B^2+G^2=9+16=25 \Rightarrow D=5$

٢)

$a(x_0+B,y_0)=a(3+3,-2)=a(6,-2)$

$a'(x_0-B,y_0)=a'(3-3,-2)=a'(0,-2)$

$c(x_0+D,y_0)=c(3+5,-2)=c(8,-2)$

$c'(x_0-D,y_0)=c(3-5,-2)=c'(-2,-2)$

٣) $x=0$

$r=\left|B+\frac{D(x-x_0)}{B}\right|=\left|3+\frac{5(0-3)}{3}\right|$

$r=\left|3+\frac{-15}{3}\right|=|3-5|=|-2|=2$

$r'=\left|B-\frac{D(x-x_0)}{B}\right|=\dots\dots=|3+5|=8$

٤) المقاربين يمران من مركز القطع $A_0(3,-2)$ وميل كل منهما

$m=\pm\frac{G}{B}$

$m=\pm\frac{4}{3}$

$y-y_0=m(x-x_0)$ معادلة المقاربين

نعوض: $y+2=\pm\frac{4}{3}(x-3)$

المهندس محمد كريم مدينة درعا - شرقي المجمع الحكومي
شمال مدرسة الألسن

المهندس محمد كريم: ٠٩٤٤٤٢٢٦٣٣

② في مستوٍ منسوب لدينا:

$$\frac{(y-1)^2}{1}-\frac{(x+1)^2}{3}=1$$

١) ما نوع القطع وأوجد عناصره A_0, B, G, D

٢) أوجد إحداثيي كل من ذروتيه ومحرقيه،

٣) أوجد طولي نصفي قطريه المحرقيين من أجل $y=3$

٤) أوجد معادلتي مقاربيه.

الحل: ١) قطع زائد محوره المحرقي // yy'

مركز القطع $A_0(-1,+1)$

$B^2=1 \Rightarrow B=1$ و $G^2=3 \Rightarrow G=\sqrt{3}$

لكن $D^2=B^2+G^2=1+3=4 \Rightarrow D=2$

٢)

$a(x_0,y_0+B)=a(-1,+1+1)=a(-1,2)$

$a'(x_0,y_0-B)=a'(-1,1-1)=a'(-1,0)$

$c(x_0,y_0+D)=c(-1,1+2)=c(-1,3)$

$c'(x_0,y_0-D)=c'(-1,1-2)=c'(-1,-1)$

٣) : $\boxed{y=3}$

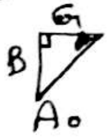
$r=\left|B+\frac{D(y-y_0)}{B}\right|$

$r=\left|1+\frac{2(3-1)}{1}\right|=|1+4|=5$

$r'=\left|B-\frac{D(y-y_0)}{B}\right|=\left|1-\frac{2(3-1)}{1}\right|$

$r'=|1-4|=|-3|=3$

٤) المقاربين يمران من مركز القطع $A_0(-1,1)$ وميل كل منهما



$m=\pm\frac{B}{G}$

$m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y-y_0=m(x-x_0)$ معادلة المقاربين

$y-1=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)$

③ لدينا $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$

① بين انه قطع زائد واوجد A_0 و B و G و D وارسمه.

٢) اوجد احداثيات كل من ذروتيه ومحارقه

٣) اوجد نصفي قطري المحرقين من اجل $x = 4$

٤) اوجد معادلتي مقاربيه مع الرسم.

الحل: ١)

$5x^2 - 4y^2 = 20$

نقسم ع 20:

$$\frac{5x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = 1$$

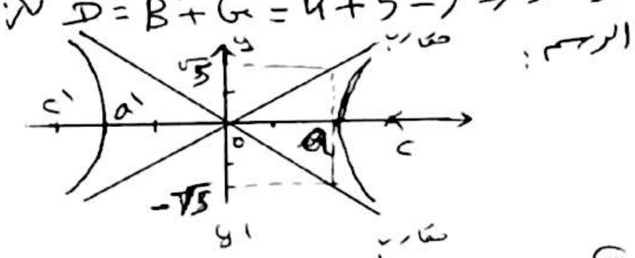
$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1}$$ قطع زائد محوره

المحرقي // xx' ومركز القطع $A_0(0,0)$

$B^2 = 4 \Rightarrow B = 2$ و $G^2 = 5 \Rightarrow G = \sqrt5$

لكن $D^2 = B^2 + G^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow D = 3$

الرسم:



٢)

$a(x_0 + B, y_0) = a(2, 0)$

$a'(x_0 - B, y_0) = a(-2, 0)$

$c(x_0 + D, y_0) = c(3, 0)$

$c'(x_0 - D, y_0) = c'(-3, 0)$

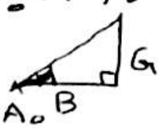
٣)

$r = \left|B + \frac{D(x - x_0)}{B}\right| = \left|2 + \frac{3(4-0)}{2}\right|$

$r = |2 + 6| = |8| = 8$

$r' = \left|B - \frac{D(x - x_0)}{B}\right| = \dots = |2 - 6| = 4$

④ المقاربين يمران من مركز القطع $A_0(0,0)$ وميل كل منهما



$m = \pm \frac{G}{B} = \pm \frac{\sqrt5}{2}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 0 = \pm \frac{\sqrt5}{2}(x - 0)$

④ لدينا $3y^2 - x^2 - 3 = 0$

① بين انه قطع زائد واوجد A_0 و B و G و D وارسمه

٢) اوجد احداثيات كل من ذروتيه ومحارقه

٣) اوجد نصفي قطري المحرقين من اجل $y = 2$

٤) اوجد معادلتي مقاربيه مع الرسم.

الحل: ١)

$3y^2 - x^2 = 3$

نقسم ع 3 نجد:

$$\frac{3y^2}{3} - \frac{x^2}{3} = 1$$

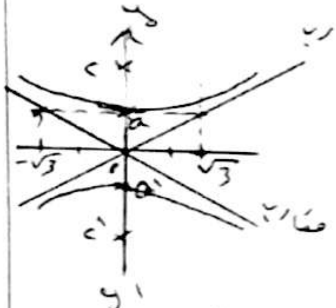
$$\boxed{\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1}$$ قطع زائد محوره

المحرقي // yy' ومركز القطع $A_0(0,0)$

$B^2 = 1 \Rightarrow B = 1$ و $G^2 = 3 \Rightarrow G = \sqrt3$

لكن $D^2 = B^2 + G^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow D = 2$

الرسم:



٢)

$a(x_0, y_0 + B)$

$a(0, 1)$

$a'(x_0, y_0 - B)$

$a'(0, -1)$

$c(x_0, y_0 + D) = c(0, 2)$

$c'(x_0, y_0 - D) = c'(0, -2)$

٣)

$r = \left|B + \frac{D(y - y_0)}{B}\right| = \left|1 + \frac{2(2-0)}{1}\right|$

$r = |1 + 4| = |5| = 5$

$r' = \left|B - \frac{D(y - y_0)}{B}\right| = \dots = |1 - 4| = 3$

④ المقاربين يمران من مركز القطع $A_0(0,0)$ وميل كل منهما

$m = \pm \frac{B}{G} = \pm \frac{1}{\sqrt3}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt3} x$

⑤ لدينا $3x^2 - y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$

ما نوع القطع وعين عناصره A_0 و B و G و D وعين احداثيات ما له من ذرى ومحارق واكتب معادلتي مقاربيه ثم ارسم القطع والمقاربين.

الحل:

$$\underset{3}{3x^2} - \underset{2}{6x} - \underset{-1}{y^2} - \underset{-1}{4y} - 4 = 0$$

$$3(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 + 4y + 4 - 4) - 4 = 0$$

$$3(x-1)^2 - (y+2)^2 = +3 - 4 + 4 = 3$$

نقسم على 3 نجد:

$$\frac{3(x-1)^2}{3} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

قطع زائد $\boxed{\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1}$

محوره المحرقي // $xx`$ ومركز القطع $A_0(1,-2)$

$B^2 = 1 \Rightarrow B = 1$, $G^2 = 3 \Rightarrow G = \sqrt{3}$

لكن $D^2 = B^2 + G^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow D = 2$

$a(x_0 + B, y_0) = a(1+1, -2) = a(2, -2)$

$a`(x_0 - B, y_0) = a`(1-1, -2) = a`(0, -2)$

$c(x_0 + D, y_0) = c(1+2, -2) = c(3, -2)$

$c`(x_0 - D, y_0) = c`(1-2, -2) = c`(-1, -2)$

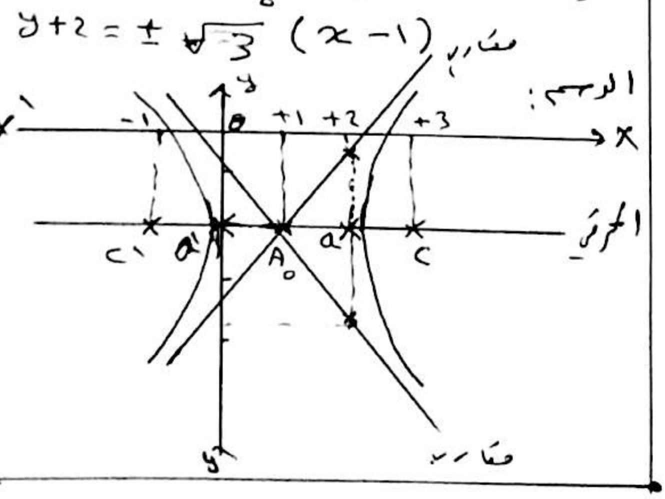
المقاربين يمران من مركز القطع $A_0(1,-2)$ وميل كل منهما

$$m = \pm\frac{G}{B} = \pm\frac{\sqrt{3}}{1} = \mp\sqrt{3}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 2 = \pm\sqrt{3}\,(x - 1)$$

الرسم:



⑥ لدينا $y^2 - 2y - 4(x+1)^2 = 3$

ما نوع القطع وعين عناصره A_0 و B و G و D وعين احداثيات ما له من ذرى ومحارق واكتب معادلتي مقاربيه ثم ارسم القطع والمقاربين.

الحل:

$$y^2 - 2y + 1 - 1 - 4(x+1)^2 = 3$$

$$(y-1)^2 - 4(x+1)^2 = 3 + 1 = 4$$

نقسم على 4 نجد:

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{4(x+1)^2}{4} = 1$$

قطع زائد $\boxed{\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{1} = 1}$

محوره المحرقي // $yy`$ ومركز القطع $A_0(-1,1)$

$B^2 = 4 \Rightarrow B = 2$; $G^2 = 1 \Rightarrow G = 1$

لكن $D^2 = B^2 + G^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow D = \sqrt{5}$

$a(x_0, y_0 + B) = a(-1, 1+2) : a(-1, 3)$

$a`(x_0, y_0 - B) = a`(-1, 1-2) = a`(-1, -1)$

$c(x_0, y_0 + D) = c(-1, 1+\sqrt{5})$

$c`(x_0, y_0 - D) = c`(-1, 1-\sqrt{5})$

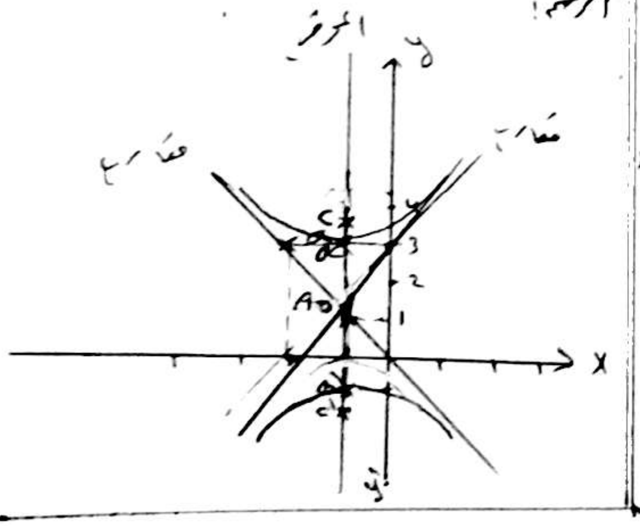
المقاربين يمران من مركز القطع $A_0(-1,1)$ وميل كل منهما

$$m = \pm\frac{B}{G} = \pm\frac{2}{1} = \pm 2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = \mp 2(x + 1)$$

الرسم:



٧ لدينا: $4x^2 - y^2 - 2y - 5 = 0$

١) بين أنه قطع زائد وعين عناصره A_0 و B و G و D

٢) اثبت أن النقطة $N\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ تقع على القطع الزائد واكتب معادلة المماس للقطع فيها.

الحل: ١)

$$4x^2 - (y^2 + 2y + 1 - 1) - 5 = 0$$

$$4x^2 - (y+1)^2 = -1 + 5 = 4$$

نقسم على 4 نجد:

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1}$$

قطع زائد محوره المحرقي // xx' ومركزه $A_0(0,-1)$

$$B^2 = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$G^2 = 4 \Rightarrow G = 2$$

لكن: $D^2 = B^2 + G^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow D = \sqrt{5}$

②

$$N\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

$$4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - (0)^2 - 2(0) - 5 = 0$$

$$\frac{4 \times 5}{4} - 5 = 0 \Rightarrow 5 - 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

محققة اذ N من القطع الزائد.

نشتق المعادلة:

$$8x - 2yy' - 2y' = 0$$

نعوض:

$$8\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - 2(0)m - 2m = 0$$

$$4\sqrt{5} = 2m \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

دستور المماس: $y - y_N = m(x - x_N)$

$$y - 0 = 2\sqrt{5}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

المهندس محمد كرم / درعا

شرق الجامع الحكومي - شمال مدرسة الأولى

٨ أوجد معادلة قطع زائد محوره المحرقي // xx' ومركز القطع $A_0(2,-3)$ فيه $a'a = 4$ و $cc' = 6$

الحل: بما أن المحور المحرقي // xx' فهو من الشكل

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2} - \frac{(y-y_0)^2}{G^2} = 1$$

$$aa' = 2B = 4 \Rightarrow B = \frac{4}{2} = 2$$

$$cc' = 2D = 6 \Rightarrow D = \frac{6}{2} = 3$$

لكن: $D^2 = B^2 + G^2$

$$9 = 4 + G^2 \Rightarrow 9 - 4 = G^2 = 5$$

نعوض:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$$

٩ أوجد معادلة قطع زائد متساوي الساقين فيه البعد المحرقي = 8 ومركزه $A_0(0,-1)$ والمحور المحرقي يوازي yy'.

الحل: بما أن المحور المحرقي // yy' فهو من الشكل

$$\frac{(y-y_0)^2}{B^2} - \frac{(x-x_0)^2}{G^2} = 1$$

البعد المحرقي $= c'c = 2D = 8$

$$D = \frac{8}{2} = 4$$

في القطع الزائد المتساوي الساقين

$$B^2 = G^2 = \frac{D^2}{2}$$

هام

$$B^2 = G^2 = \frac{16}{2} = 8$$

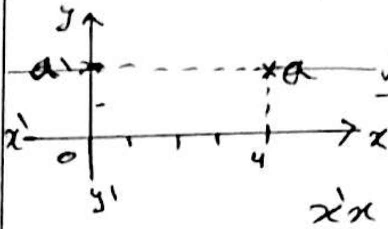
نعوض:

$$\frac{(x-0)^2}{8} - \frac{(y+1)^2}{8} = 1$$

⑩ أوجد معادلة قطع زائد متساوي الساقين فيه :

$a'(0,2)$ و $a(4,2)$

الحل: نرسم المحور المحرقي



من الرسم نجد أن المحور المحرقي $// x'x$

معادلته من الشكل:

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2}-\frac{(y-y_0)^2}{G^2}=1$$

$$a'a=2B=4 \Rightarrow B=\frac{4}{2}=2$$

القطع زائد متساوي الساقين إذن :

$$B^2=G^2=4$$

مركز القطع A_0 منتصف $[a'a]$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0+4}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2+2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$A_0(2,2)$

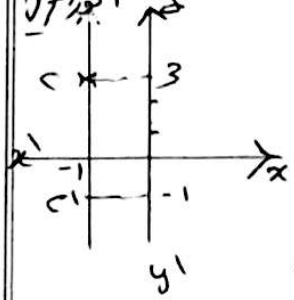
نعوض :

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

⑪ أوجد معادلة قطع زائد متساوي الساقين ومحرقاه هما :

$c'(-1,-1)$ و $c(-1,3)$

الحل: نرسم من الرسم نجد أن المحور المحرقي $// y'y$



معادلته من الشكل :

$$\frac{(y-y_0)^2}{B^2}-\frac{(x-x_0)^2}{G^2}=1$$

$$c'c=2D=4$$

$$D=\frac{4}{2}=2$$

القطع الزائد متساوي الساقين فيه :

$$B^2=G^2=\frac{D^2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

مركز القطع A_0 منتصف $[c'c]$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-1-1}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$A_0(-1,1)$

نعوض :

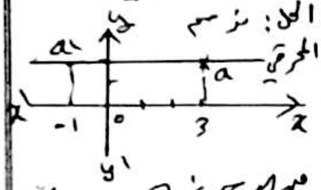
$$\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$$

⑫ أوجد معادلة قطع زائد فيه

$a'(-1,2)$ و $a(3,2)$

والبعد المحرقي $= 6$

الحل: نرسم المحرقي



من الرسم نجد المحور المحرقي يوازي $x'x$ فهو من الشكل :

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2}-\frac{(y-y_0)^2}{G^2}=1$$

$$a'a=2B=4$$

$$B=\frac{4}{2}=2$$

$$cc'=2D=6$$

$$D=\frac{6}{2}=3$$

لكن $D^2=B^2+G^2$

$$9=4+G^2$$

$$9-4=G^2$$

$$G^2=5$$

A_0 منتصف $[a'a]$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-1+3}{2}$$

$$x_0=\frac{2}{2}=1$$

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2+2}{2}$$

$$y_0=\frac{4}{2}=2$$

$A_0(1,2)$

نعوض :

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$$

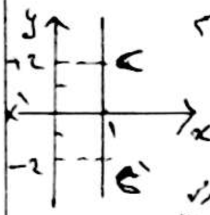
وسلامي ((

⑬ أوجد معادلة قطع زائد فيه

$c'(+1,-2)$ و $c(+1,2)$

و $2B=2$

الحل: نرسم من الرسم نجد أن المحور المحرقي يوازي $y'y$



فهو من الشكل :

$$\frac{(y-y_0)^2}{B^2}-\frac{(x-x_0)^2}{G^2}=1$$

$$c'c=2D=4$$

$$D=\frac{4}{2}=2$$

$$2B=2$$

$$B=\frac{2}{2}=1$$

لكن $D^2=B^2+G^2$

$$4=1+G^2$$

$$4-1=G^2$$

$$G^2=3$$

A_0 منتصف $[c'c]$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+1}{2}$$

$$x_0=\frac{2}{2}=1$$

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-2+2}{2}$$

$$y_0=\frac{0}{2}=0$$

$A_0(1,0)$

نعوض :

$$\frac{(y-0)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{3}=1$$

لكم ((

(١٤) لدينا: $4x^2-36=9y^2$

بين انه قطع زائد وعين A_0 و B و G و D و
وعين ما له من ذرا ومحارقه واكتب المقاربين وارسمه.
الحل: في الكتاب التمرين ① صفحة ٦٨-٦٩

(١٥) لدينا: $64y^2=36(x^2+4)$

بين انه قطع زائد .... وارسمه.
الحل: في الكتاب التمرين ② صفحة ٦٩-٧٠
لاحظ ان: $64y^2-36x^2=144$

(١٦) لدينا: $y^2-x^2=1$

بين انه قطع زائد ---- وارسمه.
الحل في الكتاب صفحة (٧١) التمرين الثالث

(١٧) لدينا: $4x^2-9y^2+16x+18y-29=0$

بين انه قطع زائد وعين A_0 و B و G و D و
وعين احداثيات الذرا والمحارق والمقاربين وارسمه.
الحل في الكتاب التمرين الرابع صفحة ٧٢-٧٣ ٧٤

(١٨) لدينا: $3x^2-4y^2-6x=9$

١) بين انه قطع زائد وعين وسطاءه (B, G, D)
٢) تحقق ان النقطة $N(-3,3)$ تقع على القطع الزائد.
٣) اوجد معادلة المماس له في N.
الحل: في الكتاب صفحة ٧٤-٧٥-٧٦

(١٩) اوجد معادلة قطع زائد فيه

$a'(-2,3)$, $a(-2,9)$ و $D=5$
ثم عين محرقيه: ...
الحل: في الكتاب صفحة ٧٦-٧٧

(٢٠) اوجد معادلة قطع زائد فيه

$c'(-2,2)$, $c(4,2)$ و $G=2$
ثم أوجد M و M' عند $x=6$
الحل: في الكتاب صفحة ٧٧-٧٨

(٢١) في مستوى منسوب الى (دورة ٢٠٠٦)

جملة قانونية قطع زائد معادلته:

$$16y^2+32y-9(x-1)^2=128$$

المطلوب: ١) عين مركز القطع ووسطاءه:
D و G و B و إحداثيات ذروتيه وارسمه.
٢) أوجد معادلتي مستقيمي المقاربين.
((١٠٠ درجة))

الحل:

① $16(y^2+2y+1-1)-9(x-1)^2=128$

$16(y+1)^2-9(x-1)^2=16+28=144$

نقسم على 144:

$$\frac{16(y+1)^2}{144}-\frac{9(x-1)^2}{144}=1$$

$$\boxed{\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{16}=1}$$

قطع زائد محوره المحرقي // $y'y$ ومركز القطع $A_0(1,-1)$

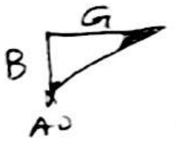
$B^2=9 \Rightarrow B=3$

$G^2=16 \Rightarrow G=4$

لكن: $D^2=B^2+G^2=9+15=25$

$D=5$

٢) المقاربين يمران من $A_0(1,-1)$ وميل كل منهما:

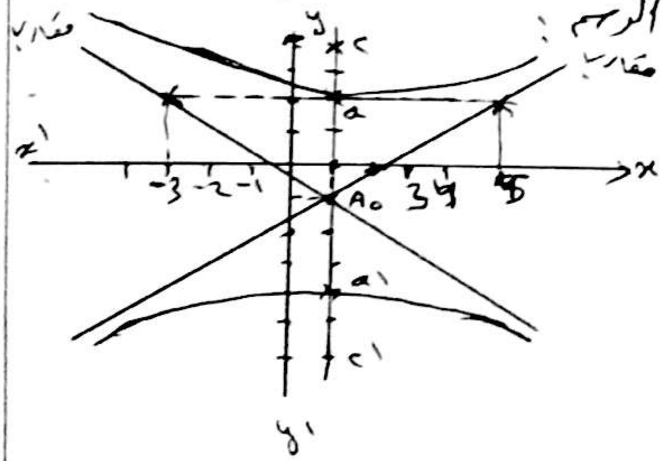


$$m=\pm\frac{B}{G}=\pm\frac{3}{4}$$

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

المقاربين: $y+1=\pm\frac{3}{4}(x-1)$

الرسم:



٢٢ دورة ٢٠٠٨ ٨٠ درجة

في مستوٍ محدث بجملة متعامدة نظامية قطع زائد معادلته: $9x^2=16y^2+144$

١) عين وسطاءه (D و G و B) وإحداثيي كل من ذروتيه واحداثيي كل من محرقيه،

٢) اكتب معادلتي مستقيمي المقاربين وارسم القطع مع مقاربيه في نفس الجملة.

الحل: نتركه للطالب كما سبق

٢٣ دورة ٢٠١٢

في مستوٍ متوضع لدينا المعادلة:

$x^2+4x-9y^2-5=0$

١) اثبت انها قطعاً زائداً؟ عين مركزه ووسطاءه (B و G و D)

٢) اوجد احداثيي كل من ذروتيه وكل من محرقيه وأوجد معادلتي مقاربيه.

الحل: نتركه للطالب كما سبق

٢٤ دورة ٢٠١٦

في مستوٍ متوضع الى جملة متعامدة نظامية قطع زائد معادلته:

$x^2-2y^2-4=0$

١) عين عناصره (وسطاءه): B, G, D واحداثيي كل محرقيه وذروتيه واكتب معادلتي مقاربيه [مع الرسم زيادة]

٢) اكتب معادلة المماس للقطع الزائد في نقطة منه $M(2\sqrt{2},\sqrt{2})$

الحل: ١)

$x^2-2y^2=4$

نقسم ع ٤ نجد: $\frac{x^2}{4}-\frac{2y^2}{4}=1$

قطع زائد $\boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1}$

محوره المحرقي // $x'x$ ومركزه $A_0(0,0)$

$B^2=4 \Rightarrow B=2$

$G^2=2 \Rightarrow G=\sqrt{2}$

لكن $D^2=B^2+G^2=4+2=6$

$D=\sqrt{6}$

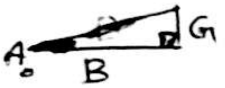
$a(x_0+B,y_0)=a(2,0)$

$a'(x_0-B,y_0)=a'(-2,0)$

$c(x_0+D,y_0)=c(\sqrt{6},0)$

$c'(x_0-D,y_0)=c'(-\sqrt{6},0)$

المقاربين يمران من $A_0(0,0)$ وميل كل منهما

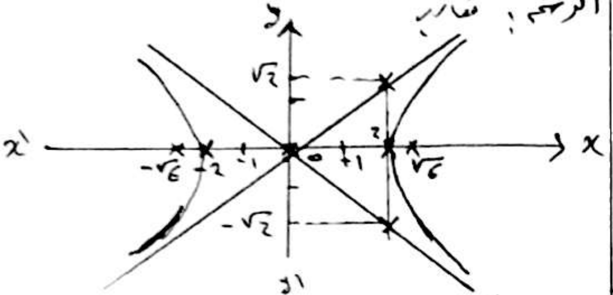


$m=\pm\frac{G}{B}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y-y_0=m(x-x_0)$

المقاربين $y-0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-0)$

الرسم:



② $M(2\sqrt{2},\sqrt{2})$ منه

نشتق $2x-4yy'=0 \Rightarrow 2(2\sqrt{2})-4(\sqrt{2})m=0$

$4\sqrt{2}=4\sqrt{2}m \Rightarrow m=\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=1$

المماس: $y-y_M=m(x-x_M)$

$y-\sqrt{2}=1(x-2\sqrt{2})$

٢٥ دورة ٢٠١٧

في مستوٍ متوضع الى جملة متعامدة نظامية لدينا مجموعة النقط التي تحقق العلاقة:

$3x^2-4y^2-6x=9$

المطلوب: بين انها تمثل قطعاً زائداً، عين احداثيي مركزه واوجد وسطاءه: B و G و D ومعادلتي مقاربيه.

الحل: نتركه للطالب

دراسة تحولات التابع ورسم خطه البياني تتضمن الخطوات الآتية:

- التعريف ← lim
- y' ونفرضه وجدوله
- y'' ← الدرجة الثانية لا يوجد جدول
  - ← الدرجة الثالثة والكسري يوجد جدول
- التقاطع مع ← $y'y$ أي $x=0$ ونجد $y = ?$
  - ← $x'x$ أي $y=0$ ونجد $x = ?$ حلك
- الرسم:

التعريف ← lim ← y' ← y'' ← التقاطع ← الرسم

دراسة ورسم

---

① اوجد مجموعة التعريف ونهايات التابع عند أطراف مجال التعريف لكل تابع ثم أوجد المشتق الأول والثاني لكل تابع:

① $y = 5x^2 - 6x + 2$

الحل:

- التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty , +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} y = +\infty$

  صورة: $5(-\infty)^2 = +\infty$ ، $5(+\infty)^2 = +\infty$
- $y' = 10x - 6$
- $y'' = 10$

② $y = -3x^2 + x - 5$

الحل:

- التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty , +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

  صورة: $-3(-\infty)^2 = -\infty$ ، $-3(+\infty)^2 = -\infty$
- $y' = -6x + 1$
- $y'' = -6$

③ $y = 2x^3 - 3x^2 + x - 6$

الحل:

- التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty , +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$

  صورة: $2(-\infty)^3 = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

  $2(+\infty)^3 = +\infty$
- $y' = 6x^2 - 6x + 1$
- $y'' = 12x - 6$

④ $y = -x^3 + x^2 - x + 1$

الحل:

- التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty , +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$

  صورة: $-(-\infty)^3 = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to \infty} y = -\infty$

  صورة: $-(+\infty)^3 = -\infty$
- $y' = -3x^2 + 2x - 1$
- $y'' = -6x + 2$

دستور التفاضل: $dy = y' . dx$

② أوجد تفاضل التابع:

$y = -x^2 + 3x + 1$ عندما $x = 1$ و $dx = 0{,}3$

الحل: دستور التفاضل: $dy = y' . dx$

$y' = -2x + 3$

$dy = (-2x + 3)\, dx$

نعوض:

$dy = [-2(1) + 3)(0{,}3)$

$dy = (-2+3)(0{,}3) = (1)(0{,}3) = 0{,}3$

② أوجد تفاضل التابع:

$y = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 1$

عندما $x = 2$ و $dx = 0{,}1$

الحل: دستور التفاضل:

$dy = y' . dx$

$y' = 6x^2 - 12x + 5$

$dy = [6x^2 - 12x + 5]\, dx$

$dy = [6(2)^2 - 12(2) + 5]\,(0{,}1)$

$dy = [24 - 24 + 5](0{,}1) = 5(0{,}1) = 0{,}5$

الناظم لمنحني التابع في نقطة منه

- النقطة ... A
- مشتق أي y'
- لحظة التعويض تصبح $y' = m$ ميل المماس

أما ميل الناظم $m' = \frac{-1}{m}$

دستور الناظم $y - y_A = m'(x - x_A)$ ونعوض

المماس لمنحني التابع في نقطة منه

- النقطة ... A
- مشتق أي y'
- لحظة التعويض تصبح $y' = m$ ميل المماس

الدستور: $y - y_A = m(x - x_A)$ ثم نعوض

٢

① أوجد معادلة المماس لمنحني التابع $y = 3x^2 - 5x$ في نقطة منه فاصلتها $x = -1$.

الحل:

$x = -1 : y = 3(-1)^2 - 5(-1)$

$y = 3 + 5 = 8$ $\boxed{A(-1, 8)}$

$y' = 6x - 5$

$m = 6(-1) - 5 = -6 - 5 = -11$

دستور المماس $y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 8 = -11(x + 1)$

② أوجد معادلة الناظم لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x = 1$

$y = -x^3 + 3x^2$

الحل:

$x = 1 : y = -(1)^3 + 3(1)^2$

$y = -1 + 3 = 2$ $\boxed{A(1, 2)}$

$y' = -3x^2 + 6x$

$m = -3(1)^2 + 6(1)$

$m = -3 + 6 = 3$

أما ميل الناظم: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{3}$

دستور الناظم: $y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 2 = \frac{-1}{3}(x - 1)$

③ أوجد معادلة المماس لمنحني التابع $y = x^3 + x^2$ في نقطة منه $A(-1, 0)$

الحل: $A(-1, 0)$

$y' = 3x^2 + 2x$

$m = 3(-1)^2 + 2(-1) = 3 - 2 = 1$

دستور المماس: $y - y_A = m(x - x_A)$

نعوض:

$y - 0 = 1(x + 1)$

٤

اوجد التكامل غير المحدود لكل مما يلي :

① $I = \int (x^3 - 4x^2 + 5x + 2)\,dx$

الحل :

$$I = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x + c$$

② $I = \int (x^2 + 3x)^2\,dx$

الحل :

$$I = \int (x^4 + \overset{2(x^2)(3x)}{6x^3} + 9x^2)\,dx$$

$$I = \frac{x^5}{5} + \frac{6x^4}{4} + \frac{9x^3}{3} + c$$

٥

اوجد التكامل المحدود لكل مما يلي :

① $S = \int_1^2 (6x^2 - 6x)\,dx$

الحل :

$$S = \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right]_1^2$$

$$S = \left[2x^3 - 3x^2\right]_1^2$$

$$S = [2(2)^3 - 3(2)^2] - [2(1)^3 - 3(1)^2]$$

$$S = [16 - 12] - [2 - 3]$$

$$S = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5$$

② $S = \int_0^3 (4x^3 + 6x - 10)\,dx$

الحل :

$$S = \left[\frac{4x^4}{4} + \frac{6x^2}{2} - 10x\right]_0^3$$

$$S = \left[x^4 + 3x^2 - 10x\right]_0^3$$

$$S = [(3)^4 + 3(3)^2 - 10(3)] - [0]$$

$$S = 81 + 27 - 30$$

$$S = 78$$

٦

دورة ٢٠٠٦

١٢٠ درجة

ليكن التابع $y = -x^2 + 2x$

والمطلوب : ١) ادرس تحولات وارسم خطه البياني ثم اكتب معادلة المماس له في نقطة منه فاصلتها $x = 2$

٢) احسب مساحة السطح المحصور بين خطه البياني ومحور السينات .

الحل : ①

$$y = -x^2 + 2x$$

• التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty , +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

نبحث عن مقارب مائل إن وجد هو من الشكل : $y = mx + c$

$$m = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} (-x) = \pm\infty$$

يوجد منحنى مقارب لـ yy'

• $\boxed{y' = -2x + 2}$

$$y' = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2$$

$$x = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y = -(1)^2 + 2(1) = -1 + 2 = 1$$

$$\boxed{(1 , 1)}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1 عظمى	$\searrow$	$-\infty$

• $y'' = -2 < 0$

التقعر نحو y^-

• التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$

$y = -(0)^2 + 2(0) = 0$ $\boxed{(0,0)}$

التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$

$-x^2 + 2x = 0$

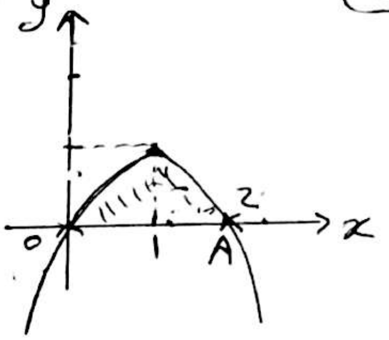
$x(-x+2) = 0$

إما $x = 0$ $\boxed{(0,0)}$

أو $-x+2=0 \Rightarrow -x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{-1}=2$

$\boxed{(2,0)}$

الرسم :



$x = 2$: $y = -4+4 = 0$ $\boxed{A(2,0)}$

$y' = -2x+2$

$m = -2(2)+2 = -4+2 = -2$

دستور المماس :

$y - y_A = m(x - x_A)$

نعوض :

$y - 0 = -2(x-2)$

② على المجال $[0,2]$ فإن السطح المطلوب فوق $x'x$ تكامل نفس التابع.

$S = \int_0^2 (-x^2+2x)\,dx$

$S = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2$

$S = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2$

$S = \left[-\frac{8}{3} + \frac{4}{1}\right] - [0]$

$S = -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = +\frac{4}{3}$

$\boxed{7}$ دورة ٢٠٠٧ — ١٤٠ درجة

في مستوٍ منسوب إلى جملة متعامدة ومتجانسة ليكن التابع : $y = x^2 - 2x$

① ادرس تغيرات التابع وارسم خطه البياني ثم اكتب معادلة المماس له في نقطة منه فاصلتها $x = 2$

② احسب مساحة السطح المحصور بين خطه البياني والمحور $x'x$.

الحل: ① $y = x^2 - 2x$

• التابع كثير حدود معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} y = +\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y = mx + c$

$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(x) = \pm\infty$

• $\boxed{y' = 2x - 2}$

$y' = 0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{2}=1$

$y = (1)^2 - 2(1) = 1-2 = -1$ $\boxed{(1,-1)}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 ق صغرى	$\nearrow$	$+\infty$

• $y'' = 2 > 0$

التقعر نحو y^+

• التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه

$y = (0)^2 - 2(0) = 0$ $\boxed{(0,0)}$

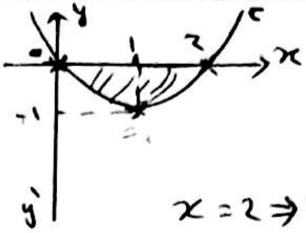
التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

إما $x = 0$ $\boxed{(0,0)}$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$ $\boxed{(2,0)}$

• الرسم :



المماس :

$x = 2 \Rightarrow y = 4 - 4 = 0$ $\boxed{A(2,0)}$

$y' = 2x - 2$

$m = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2$

دستور المماس : $y - y_A = m(x - x_A)$

نعوض : $y - 0 = 2(x - 2)$

② السطح المطلوب تحت $x'x$ لذلك نكامل عكس التابع :

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2$$

$$S = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2$$

$$S = \left[\frac{-(2)^3}{3} + (2)^2\right] - \left[\frac{-(0)^3}{3} + (0)^2\right]$$

$$S = \frac{-8}{\underset{1}{3}} + \frac{4}{\underset{3}{1}} = \frac{-8+12}{3} = +\frac{4}{3}$$

٨ | دورة ٢٠٠٩ | ١٤٠ درجة

ليكن التابع : $y = -x^2 + 2x + 3$

والمطلوب : ١) ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني

٢) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع والمحور $x'x$.

الحل : ① $y = -x^2 + 2x + 3$

• التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

• $\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} y = -\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y = mx + c$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(-x) = \mp\infty$$

يوجد منحنى مقارب للمستقيم $y'y$

• $\boxed{y' = -2x + 2}$

$y' = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-2} = 1$

$y = -(1)^2 + 2(1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	4 عظمى	↘	$-\infty$

$\boxed{(1,4)}$

• $y'' = -2 < 0$

التقعر نحو y^-

التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ وضعه

$y = -(0)^2 + 2(0) + 3 = 3$ $\boxed{(0,3)}$

التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ وضعه

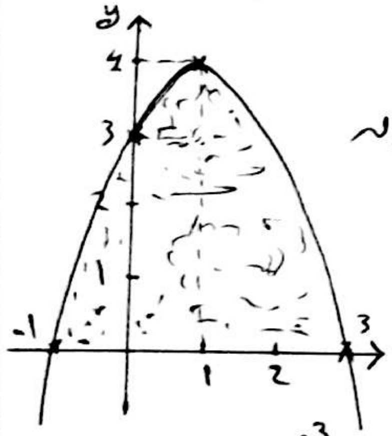
$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0 \leftarrow \checkmark\ +1\ \ -3$

إما $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ $\boxed{(-1,0)}$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = +3$ $\boxed{(3,0)}$

الرسم :



② السطح المحصور فوق $x'x$ لذلك نكامل نفس التابع

$$S = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx$$

$$S = \left[-\frac{x^3}{2} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$S = \left[\frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$S = \left[\frac{-27}{3} + 9 + 9\right] - \left[\frac{1}{3} + 1 - 3\right]$$

$$S = 9 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{11}{\underset{3}{1}} - \frac{1}{\underset{1}{3}} = \frac{33}{3} - \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{32}{3}$$

٩ || دورة ٢٠١١ الأولى || ١٤٠ درجة

لدينا التابع $y = -x^2 + 4x$

١) ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني.

٢) اوجد معادلة المماس لمنحني التابع في النقطة $O(0,0)$ منه.

٣) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمحور $x'x$.

الحل:

$$y = -x^2 + 4x$$

① • التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} y = -\infty$$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل:

$$y = mx + c$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (-x) = \mp\infty$$

يوجد منحني مقارب للمتغير $y'y$

$$\boxed{y' = -2x + 4}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow -2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-2} = +2$$

$$y = -(+2)^2 + 4(+2) = -4 + 8 = +4$$

$$\boxed{(2, +4)}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+4$ عظمى	$\searrow$	$-\infty$

$$y'' = -2 < 0$$

التقعر نحو y^-

التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه:

$$y = -(0)^2 + 4(0) = 0 \quad \boxed{(0,0)}$$

التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه

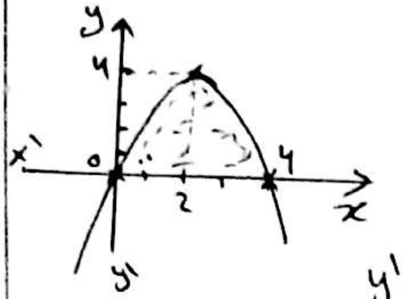
$$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0$$

إما $x = 0$ $\boxed{(0,0)}$

أو: $-x + 4 = 0 \Rightarrow -x = -4$

$$x = \frac{-4}{-1} = 4 \qquad \boxed{(4,0)}$$

الرسم:



② المماس في $O(0,0)$ من التابع

$$y' = -2x + 4$$

$$m = -2(0) + 4 = +4$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = 4(x - 0) \Rightarrow y = -4x$$

③ السطح المطلوب فوق $x'x$ لو أن الخط البياني نفس التابع

$$S = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx$$

$$S = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^4$$

$$S = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4$$

$$S = \left[\frac{-(4)^3}{3} + 2(4)^2\right] - [0]$$

$$S = \frac{-64}{3} + \frac{32}{1} = \frac{-64}{3} + \frac{96}{3} = \frac{32}{3}$$

اوجد تفاضل التابع $y = -x^2 + 4x$ عندما $x = 3$ و $dx = 0,1$

الحل: دستور التفاضل: $dy = y' . dx$

$$y' = -2x + 4$$

$$dy = (-2x + 4)dx$$

$$dy = (-2(3) + 4)(0,1)$$

$$dy = (-6 + 4)(0,1)$$

$$dy = -2(0,1) = -0,2$$

١٠ دورة ٢٠١١ الإضافية

لدينا التابع $y = ax^2 + bx$

١) أوجد a و b إذا علمت أن نقطة النهاية المحلية للتابع هي $(-1, -1)$

٢) ادرس تحولات التابع: $y = x^2 + 2x$ وارسم خطه البياني.

الحل: ①

$(\overset{x}{-1}, \overset{y}{-1})$ من التابع فهي تحقق معادلته:

$$-1 = a(-1)^2 + b(-1) \Rightarrow a - b = -1 \cdots ①$$

شرط النهاية المحلية عند $x = -1$ هو $y' = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2ax + b \\ x = -1 ,\ y' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a(-1) + b = 0$$

$$b = 2a \cdots ②$$

نعوض ② في ① نجد:

$$a - 2a = -1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

ومنه $b = 2(1) = 2$

التابع هو: $\boxed{y = x^2 + 2x}$

② • التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل

$$y = mx + c$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (x) = \pm\infty$$

للتابع منحنى مقارب لـ $y'y$

$$\boxed{y' = 2x + 2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2$$

$$x = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = (-1)^2 + 2(-1) = 1 - 2 = -1$$

$\boxed{(-1, -1)}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	∞	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
			قصوى		

• $y'' = 2 > 0$

التقعر نحو y^+

• التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه

$y = (0)^2 + 2(0) = 0$ $\boxed{(0, 0)}$

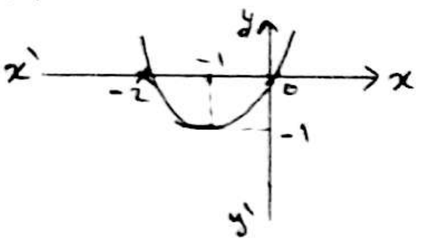
التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0$$

إما $x = 0$ $\boxed{(0, 0)}$

أو: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ $\boxed{(-2, 0)}$

الرسم:



مثال: لدينا التابع: $y = x^2 + ax + b$

① أوجد a و b علماً أن النقطة $A(1, -4)$ نهاية محلية للتابع. ② أوجد تفاضل التابع.

الحل: $A(1, -4)$ من التابع أي:

$$-4 = (1)^2 + a(1) + b \Rightarrow -4 - 1 - a = b$$

$$b = -5 - a \cdots ①$$

شرط النهاية المحلية عند $x = 1$ هو $y' = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2x + a \\ y' = 0 ;\ x = 1 \end{array}\right] \Rightarrow 0 = 2(1) + a$$

$$-2 = a$$

$$a = -2 \quad ②$$

نعوض ② في ① نجد:

$$b = -5 - (-2) = -5 + 2 = -3$$

التابع هو: $y = x^2 - 2x - 3$

② تفاضل التابع هو $dy = y' \cdot dx$

$y' = 2x - 2$

$$dy = (2x - 2)dx$$

١١ أولاً لدينا التابع
$y = ax^2 + 2x - 3$
أوجد قيمة a علماً أن منحني التابع يمر بالنقطة $N(-2, -3)$

ثانياً: لدينا التابع $y = x^2 + 2x - 3$
والمطلوب ① ادرس تغيرات التابع وارسم خطه.
٢) أوجد تفاضل التابع من أجل $x = 3$ و $dx = 0{,}1$
٣) أوجد معادلة الناظم لمنحني التابع في نقطة منه $A(2,1)$.
٤) احسب مساحة السطح المحصور بين منحني التابع والمحور $x'x$ والمستقيمين $x = -1$ و $x = -2$

الحل: أولاً:
$N(-2, -3)$:
$-3 = a(-2)^2 + 2(-2) - 3$
$-3 + 4 + 3 = 4a \Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow \boxed{a = 1}$

ثانياً: $y = x^2 + 2x - 3$

① التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y = mx + c$

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x) = \pm\infty$

$\boxed{y' = 2x + 2}$

$y' = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2$

$x = \frac{-2}{2} = -1$

$y = (-1)^2 + 2(-1) - 3$

$y = +1 - 2 - 3 = -4 \quad \boxed{(-1, -4)}$

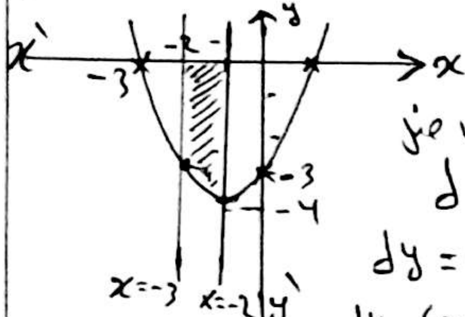
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	∞	↘	-4	↗	$+\infty$

التقعر نحو y^+ $\quad y'' = 2 > 0 \Rightarrow$

التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه
$y = (0)^2 + 2(0) - 3 = -3 \quad \boxed{(0, -3)}$

التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه
$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad -1 \quad +3$
$(x-1)(x+3) = 0$
إما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = +1 \quad \boxed{(+1, 0)}$
أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad \boxed{(-3, 0)}$

الرسم:



② دستور التفاضل
$dy = y' \cdot dx$
$dy = (2x+2)\,dx$
$dy = (2(3)+2)(0{,}1)$
$dy = (6+2)(0{,}1) = 8(0{,}1) = 0{,}8$

③ $A(2,1)$
$y' = 2x + 2$
$m = 2(2) + 2 = 4 + 2 = 6$
أما ميل الناظم: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{6}$
معادلة الناظم
$y - y_A = m'(x - x_A)$
$y - 1 = \frac{-1}{6}(x - 2)$

④ السطح المطلوب تحت $x'x$ نأخذ عكس التابع
$S = \int_{-2}^{-1} (-x^2 - 2x + 3)\,dx$
$S = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{-1}$
$S = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-2}^{-1}$
$S = \left[\frac{+1}{3} - 1 - 3\right] - \left[\frac{8}{3} - 4 - 6\right]$
$S = \frac{1}{3} - 4 - \frac{8}{3} + 4 + 6 = \frac{6}{\frac{1}{3}} - \frac{7}{\frac{3}{1}}$
$S = \frac{18}{3} - \frac{7}{3} = \frac{11}{3}$

١٢

① ادرس تحولات التابع: $y=x^2-2x-3$ وارسم خطه البياني.

② أوجد معادلتي المماس والناظم له في النقطة $A(-1,0)$ منه.

الحل: في الكتاب صفحة ١٠٩-١١١

١٣ ليكن التابع: $y=ax^2+bx$

① عين a و b إذا علمت ان نقطة النهاية المحلية هي $A(3,9)$

② ادرس تحولات التابع $y=-x^2+6x$

③ اوجد النقط المشتركة بين منحني التابع السابق والمستقيم $y=2x$

الحل: في الكتاب صفحة ١١٤ - ١١٧

اثبت حل الطلب الثالث: بالحل المشترك نجد:

$$y_{\text{مستقيم}}=y_{\text{التابع}} \Rightarrow 2x=-x^2+6x$$

$$x^2+2x-6x=0 \Rightarrow x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

إما $x=0 \Rightarrow y=2(0)=0$ $\boxed{(0,0)}$

او $x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=2(4)=8$

$\boxed{(4,8)}$

١٤ لدينا التابع: $y=x^2+4x+3$

① ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني

② اوجد تفاضل التابع

③ اوجد معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه $A(-3,0)$

④ اوجد مساحة السطح المحصور بين منحني التابع والمستقيمين: $x=-1 , x=+1$

الحل: ① التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R=]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} y=\infty$, $\lim_{x\to\infty} y=\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y=mx+c$

$$m=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}(x)=\mp\infty$$

يوجد منحني مقارب لـ $y'y$

$\boxed{y'=2x+4}$

$y'=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow$

$x=\frac{-4}{2}=-2$

$y=(-2)^2+4(-2)+3=4-8+3=-1$

$\boxed{(-2,-1)}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2 صغرى	↗	$+\infty$

$y''=2>0 \Rightarrow$ التقعر نحو y^+

التقاطع مع $y'y$ أي $x=0$ ومنه

$y=(0)^2+4(0)+3=+3$ $\boxed{(0,+3)}$

التقاطع مع $x'x$ أي $y=0$ ومنه

$x^2+4x+3=0 \Rightarrow (x+1)(x+4)=0$

إما $x+1=0 \rightarrow x=-1$ $\boxed{(-1,0)}$

او $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ $\boxed{(-4,0)}$

② دستور التفاضل: $dy=y'\cdot dx$

$dy=(2x+4)\,dx$

③ $A(-3,0)$ منه

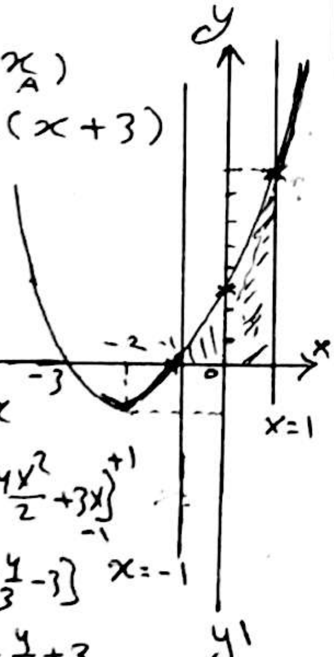
$y'=2x+4 \Rightarrow m=2(-3)+4=-6+4$

$m=-2$

$y-y_A=m(x-x_A)$

$y-0=-2(x+3)$

④ السطح المطلوب فوق $x'x$ نكامل نفس التابع



$$S=\int_{-1}^{+1}(x^2+4x+3)\,dx$$

$$S=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{+1}$$

$$S=\left[\frac{1}{3}+\frac{4}{2}+3\right]-\left[\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}-3\right]$$

$$S=\frac{1}{3}+\frac{4}{2}+3+\frac{1}{3}-\frac{4}{2}+3$$

$$S=\underset{3}{\frac{2}{3}}+\underset{3}{\frac{6}{1}}=\frac{2}{3}+\frac{18}{3}=\frac{20}{3}$$

Scanned by CamScanner

٤١ لدينا التابع : $y = -x^3 + 3x$

① ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني.

② اوجد تفاضل التابع من اجل $x = 3$ و $dx = 0,2$

③ اوجد معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه $x = 2$

④ أوجد مساحة السطح المحصور بين منحني التابع ومحور $x'x$ ومحور $y'y$ والمستقيم $x = -1$

الحل:

$$\boxed{y = -x^3 + 3x}$$

① التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty , +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y = mx + c$:

$$m = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} (-x^2) = -\infty$$

يوجد منحنى مقارب لـ $y'y$

$$\boxed{y' = -3x^2 - 3}$$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3$

$x^2 = \frac{3}{3} = 1$

إما : $x = -1 \Rightarrow y = -(-1)^3 + 3(-1) = 1 - 3 = -2$ $\boxed{(-1 , -2)}$

أو : $x = +1$

$y = -(1)^3 + 3(1) = -1 + 3 = 2$ $\boxed{(+1 , +2)}$

x	$-\infty$		-1		$+1$		∞
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2 صغرى	$\nearrow$	$+2$ عظمى	$\searrow$	$-\infty$

$y'' = -6x$

$y'' = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{-6} = 0$

ومنه $y = -(0)^3 + 3(0) = 0$ $\boxed{\text{نقطة انعطاف } (0,0)}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	
جهة التقعر	$+\infty$	y^+	0	y^-	$-\infty$

التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه

$y = -(0)^3 + 3(0) = 0$ $\boxed{(0,0)}$

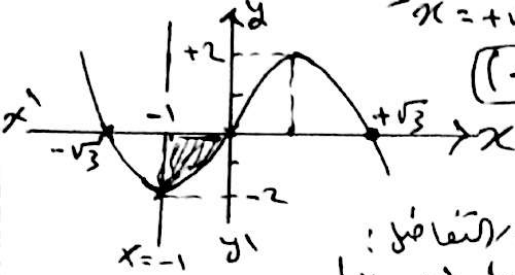
التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه

$-x^3 + 3x = 0 \Rightarrow x(-x^2 + 3) = 0$

إما $x = 0$ $\boxed{(0,0)}$

أو $-x^2 + 3 = 0 \Rightarrow -x^2 = -3$

$x^2 = \frac{-3}{-1} = +3$ → $x = -\sqrt{3}$ $\boxed{(-\sqrt{3} , 0)}$ ، $x = +\sqrt{3}$ $\boxed{(+\sqrt{3} , 0)}$



② حساب التفاضل :

$dy = y' \, dx$

$dy = (-3x^2 + 3) \, dx$

$dy = (-3(9) + 3)(0,2) = -24(0,2)$

$dy = -4,8$

③ $x = 2 : y = -8 + 6 = -2$ $A(2,-2)$

$y' = -3x^2 + 3$

$m = -3(4) + 3 = -12 + 3 = -9$

المماس : $y - y_A = m(x - x_A)$

$y + 2 = -9(x - 2)$

④ السطح المطلوب تحت $x'x$ نكامل عكس التابع

$$S = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x) \, dx$$

$$S = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{0}$$

$$S = \left[\frac{0}{4} - \frac{0}{2} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{3(-1)^2}{2} \right]$$

$$S = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right)$$

$$S = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{-1}{4} + \frac{6}{4}$$

$$S = \frac{5}{4}$$

دورة ٢٠١٦ | ٢

لدينا التابع $y = x^3 - 3x$

① ادرس تغيرات التابع وارسم خطه البياني.

②) اوجد مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C للتابع والمحور $x'x$ والمستقيمين $x = 0$ و $x = -1$

زيادة عن الدورة الطلب الثالث والرابع

③ اوجد تفاضل التابع من اجل $x = 3$ و $dx = 0,1$

④ اوجد معادلة الناظم في نقطة منه $O(0,0)$

الحل: ① $y = x^3 - 3x$

التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y = mx + c$

$m = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \mp\infty}(x^2) = +\infty$

يوجد منحني مقارب لـ $y'y$ ،

$\boxed{y' = 3x^2 - 3}$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{3} = 1$

إما $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = +2$ $\boxed{(-1, 2)}$

أو $x = +1$

$y = (1)^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$ $\boxed{(1, -2)}$

x	$-\infty$		-1		$+1$		∞
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2 عظمى	↘	-2 صغرى	↗	∞

$y'' = 6x$

$y'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{6} = 0$

$y = (0)^3 - 3(0) = 0 \Rightarrow$ نقطة انعطاف $O(0,0)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
جهة التقعر	$-\infty$	y^-	0	y^+	

التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه

$y = (0)^3 - 3(0) = 0$ $\boxed{(0,0)}$

التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه

$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$

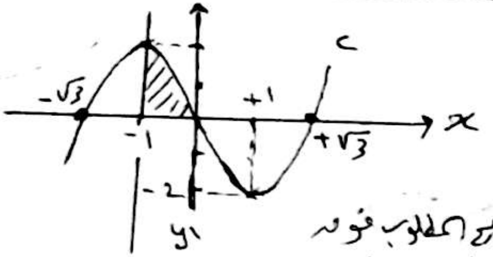
إما $x = 0$ $\boxed{(0,0)}$

أو $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$

إما $x = -\sqrt{3}$ $\boxed{(-\sqrt{3}, 0)}$

أو $x = +\sqrt{3}$ $\boxed{(+\sqrt{3}, 0)}$

الرسم:



② السطح المطلوب فوق $x'x$ نكامل نفس التابع

$x = -1$

$$S = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$S = \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{3(0)^2}{2}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{3(-1)^2}{2}\right]$$

$$S = 0 - \left[\underset{1}{\frac{1}{4}} - \underset{2}{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{5}{4}$$

حل الطلبين الزيادة عن سؤال الدورة

③ دستور التفاضل:

$$\left.\begin{aligned} dy &= y' \cdot dx \\ y' &= 3x^2 - 3 \end{aligned}\right] \Rightarrow dy = (3x^2 - 3)dx$$

$dy = (3(3)^2 - 3)(0,1) = (27 - 3)(0,1)$

$dy = 24(0,1) = 2,4$

④ $O(0,0)$ من التابع

$y' = 3x^2 - 3$

ميل المماس $m = 3(0)^2 - 3 = -3$

اما ميل الناظم: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

معادلة الناظم: $y - y_0 = m'(x - x_0)$

نعوض:

$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 0)$

الناظم: $y = \frac{1}{3}x$

٣ لدينا التابع $y=-x^3+3x^2$

① ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني

② اوجد تفاضل التابع من اجل $x=1$ و $dx=0{,}3$

③ اوجد معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x=2$

④ اوجد المساحة المحددة بين الخط البياني للتابع والمحور $x'x$.

الحل: ①

$$y=-x^3+3x^2$$

• التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R=]-\infty,+\infty[$

• $\lim_{x\to-\infty} y=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} y=-\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل: $y=mx+c$

$$m=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}(-x^2)=-\infty$$

يوجد منحني مقارب لـ $y'y$

$$\boxed{y'=-3x^2+6x}$$

$y'=0 \Rightarrow -3x^2+6x=0$

$3x(-x+2)=0$

اما: $3x=0 \Rightarrow x=\frac{0}{3}=0$

$y=-(0)^3+3(0)^2=0$ $\boxed{(0,0)}$

او: $-x+1=0 \Rightarrow -x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{-1}=2$

$y=-(2)^3+3(2)^2=-8+12=4$ $\boxed{(2,+4)}$

x	$-\infty$		0		2		∞
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

$y''=-6x+6$

$y''=0 \Rightarrow -6x+6=0 \Rightarrow -6x=-6$

$x=\frac{-6}{-6}=+1$

$y=-(1)^3+3(1)^2=-1+3=+2$

نقطة انعطاف $(1,2)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	
جهة التقعر	$+\infty$	y^+	2	y^-	$-\infty$

التقاطع مع $y'y$ اي $x=0$ ومنه

$y=-(0)^3+3(0)^2=0$ $\boxed{(0,0)}$

التقاطع مع $x'x$ أي $y=0$ ومنه

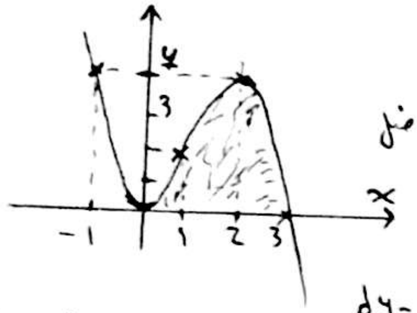
$-x^3+3x^2=0 \Rightarrow x^2(-x+3)=0$

اما: $x^2=0 \Rightarrow x=0$ $\boxed{(0,0)}$

أو: $-x+3=0 \Rightarrow -x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{-1}=3$

$\boxed{(3,0)}$

الرسم:



② دستور التفاضل

$dy=y'\,dx$

$y'=-3x^2+6x$

$dy=(-3x^2+6x)dx$

$dy=(-3(1)^2+6(1))(0{,}3)=(-3+6)(0{,}3)$

$dy=3(0{,}3)=0{,}9$

٣) $x=2: y=-(2)^3+3(2)^2=-8+12=4$

$y'=-3x^2+6x$ $A(2,4)$

$m=-3(2)^2+6(2)=-12+12=0$

المماس: $y-y_A=m(x-x_A)$

نعوض: $y-4=0(x-2)$

المماس: $\boxed{y-4=0}$ ومنه $\boxed{y=4}$

④ السطح المطلوب فوق $x'x$ نكامل نفس التابع:

$$S=\int_0^3(-x^3+3x^2)\,dx$$

$$S=\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}\right]_0^3$$

$$S=\left[\frac{-x^4}{4}+x^3\right]_0^3$$

$$S=\left[\frac{-(3)^4}{4}+(3)^3\right]-[0]$$

$$S=\frac{-81}{4}+\frac{27}{1}=\frac{-81}{4}+\frac{108}{4}$$

$$S=\frac{27}{4}$$

٤ | دورة ٢٠٠٨ | ١٤٠ درجة

ليكن التابع $y = x^3 - 3x^2$ والمطلوب:

① ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني.

② احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع والمحور $x'x$.

طلبين زيادة من الدورة هما:

③ اوجد تفاضل التابع من اجل $x = 3$ و $dx = 0,1$

④ أوجد معادلة الناظم في نقطة الانعطاف $A(1,-2)$

الحل: $y = x^3 - 3x^2$

① التابع صحيح فهو معرف ومستمر وقابل للاشتقاق في $R =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل: $y = mx + c$

$m = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} (x^2) = +\infty$

يوجد منحنٍ مقارب لـ $y'y$

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$

إما $3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} = 0$

$y = (0)^3 - 3(0)^2 = 0$ $\boxed{(0,0)}$

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y = (2)^3 - 3(2)^2 = 8 - 12 = -4$ $\boxed{(2,-4)}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0 ن عظم	↘	-4 ن صغر	↗	$+\infty$

$y'' = 6x - 6$

$y'' = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1$

$y = (1)^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$ $\boxed{(1,-2)}$

نقطة انعطاف

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
جهة التقعر	$-\infty$	y^-	-2	y^+	$+\infty$

التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه

$y = (0)^3 - 3(0) = 0$ $\boxed{(0,0)}$

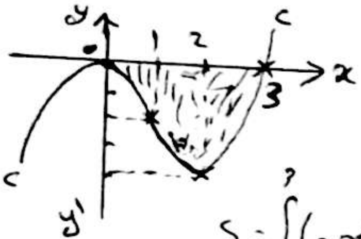
التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه

$x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0$

إما $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ $\boxed{(0,0)}$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ $\boxed{(3,0)}$

الرسم:



② السطح المطلوب تحت $x'x$ نكامل عكس التابع

$$S = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)\,dx$$

$$S = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{3x^3}{3}\right]_0^3 = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^3$$

$$S = \left[\frac{-81}{\underset{1}{4}} + \frac{27}{\underset{4}{1}}\right] - [0] = \frac{-81}{4} + \frac{108}{4}$$

$$\boxed{S = \frac{27}{4}}$$

الآن حل الطلبين الزيادة من الدورة هما:

③ دستور التفاضل: $dy = y'\,dx$

$y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow dy = (3x^2 - 6x)\,dx$

$dy = (3(9) - 6(3))(0,1) = (27 - 18)(0,1)$

$dy = 9(0,1) = 0,9$

④ نقطة الانعطاف $A(1,-2)$ من ت.١

$y' = 3x^2 - 6x$

$m = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3$ ميل المماس

اما ميل الناظم: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

دستور الناظم: $y - y_A = m'(x - x_A)$

نعوض: $y + 2 = \frac{1}{3}(x - 1)$

الشاعر: محمد إقبال:

وحومة الشر في عين الجبان بدا
غولٌ وحوتٌ وتنينٌ وتمساحُ

ليكن التابع: $y = x^3 - 3x + 2$

① ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني.

② احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع والمحور $x'x$.

طلبين زيادة عن الدورة

③ اوجد تفاضل التابع من اجل $x = 2$ و $dx = 0,2$

④ اثبت ان النقطة $A(0,2)$ من التابع واكتب معادلة المماس له فيها.

الحل:

$y = x^3 - 3x + 2$

① التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل: $y = mx + c$

$$m = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} (x^2) = +\infty$$

لا يوجد وإنما مقارب للمحور $y'y$.

$$\boxed{y' = 3x^2 - 3}$$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3$

$x^2 = \frac{3}{3} = 1$

اما: $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1) + 2$

$y = -1 + 3 + 2 = 4$ $\boxed{(-1,4)}$

او: $x = 1 \Rightarrow y = (1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ $\boxed{(1,0)}$

x	$-\infty$		-1		1		∞
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	∞

$y'' = 6x$

$y'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{6} = 0$

$y = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$ نقطة انعطاف $(0,2)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
جهة التقعر	$-\infty$	y^-	2	y^+	$+\infty$

التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه

$y = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$ $\boxed{(0,2)}$

التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه

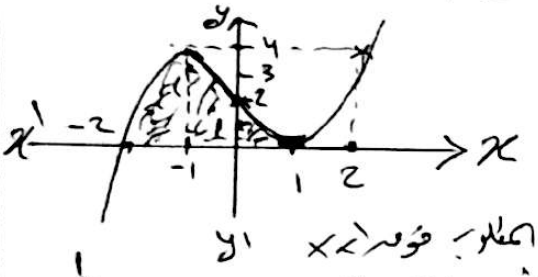
$x^3 - 3x + 2 = 0$

درجة ثالثة نأخذ نقطاً مساعدة للرسم

$x = -2 \Rightarrow y = -8 + 6 + 2 = 0$ $\boxed{(-2,0)}$

$x = +2 \Rightarrow y = 8 - 6 + 2 = 4$ $\boxed{(\ ,4)}$

الرسم:



② السطح المطلوب فوق $x'x$ نكامل نفس التابع:

$$S = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx$$

$$S = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$S = \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{2}{1}\right] - \left[\frac{16}{4} - \frac{12}{2} - 4\right]$$

$$S = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - 4 + 6 + 4 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{8}{1}$$

$$S = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} + \frac{32}{4} = \frac{27}{4}$$

حل الطلبات الزيادة:

③ دستور التفاضل:

$dy = y'\,dx$

$dy = (3x^2 - 3)\,dx$

$dy = (3(4) - 3)(0,2) = 1,8$

④ $A(\overset{x}{0}, \overset{y}{2}) : 2 = (0)^3 - 3(0) + 2$

$2 = 2 \Rightarrow$ A من التابع

$y' = 3x^2 - 3$

ميل المماس: $m = 3(0)^2 - 3 = -3$

المماس: $y - y_A = m(x - x_A)$

نعوض: $y - 2 = -3(x - 0)$

٦ ادرس تغيرات التابع $y = -x^3 + 1$ وارسم خطه البياني.

الحل: التابع فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty , +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y = mx + c$

$m = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} (-x^2) = -\infty$

$y' = -3x^2$

$y' = 0 \Rightarrow -3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{-3} = 0 \Rightarrow x = 0$

$y = -(0)^3 + 1 = +1$ $\boxed{(0, +1)}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\to$	1	$\to$	∞

$y'' = -6x$

$y'' = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{-6} = 0$

$y = -(0)^3 + 1 = 1$ نقطة انعطاف $(0, 1)$

x	$-\infty$		0		$\pm\infty$
y''		$+$	0	$-$	
جهة التقعر	$+\infty$	y^+	1	y^-	$-\infty$

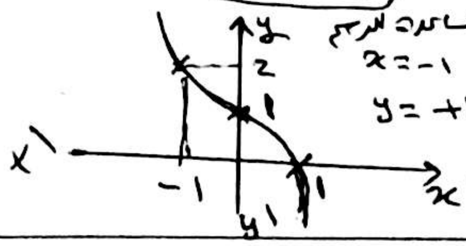
التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه

$y = -0 + 1 = 1$ $\boxed{(0, 1)}$

التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه

$-x^3 + 1 = 0 \Rightarrow -x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = \frac{-1}{-1} = 1$

$x = 1$ $\boxed{(1, 0)}$



نقطة مساعدة للرسم

$x = -1$

$y = +1 + 1 = 2$

$\boxed{(-1, 2)}$

ادرس تغيرات التابع $y = x^3 - 8$ وارسم خطه البياني.

الحل: التابع صحيح فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R =]-\infty , +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y = mx + c$

$m = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} (x^2) = \infty$

$y' = 3x^2$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow x = 0$

$y = (0)^3 - 8 = -8$ $\boxed{(0, -8)}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\to$	-8	$\to$	$+\infty$

$y'' = 6x$

$y'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{6} = 0$

$y = (0)^3 - 8 = -8$ نقطة انعطاف $(0, -8)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
جهة التقعر	$-\infty$	y^-	-8	y^+	$+\infty$

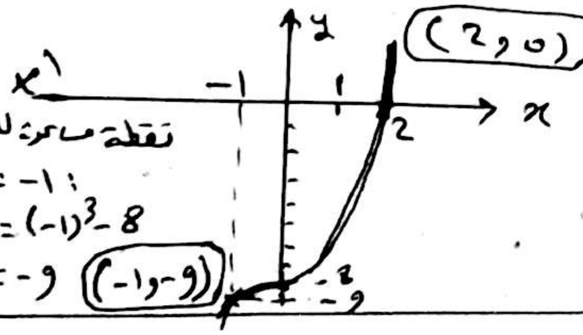
التقاطع مع $y'y$ أي $x = 0$ ومنه

$y = 0 - 8 = -8$ $\boxed{(0, -8)}$

التقاطع مع $x'x$ أي $y = 0$ ومنه

$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = +2$

$\boxed{(2, 0)}$



نقطة مساعدة للرسم

$x = -1$:

$y = (-1)^3 - 8$

$y = -9$ $\boxed{(-1, -9)}$

التابع الكسري

1 أوجد مجموعة تعريف والمستقيمين المقاربين والمشتق الأول والثاني للتوابع: ①

$$y = \frac{2x-1}{3x+1}$$

الحل:

$3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{3}$

التابع كسري فهو معرف ومستمر واشتقاقي على

$$R \setminus \{\frac{-1}{3}\}$$

$\lim_{x\to\mp\infty} y = \frac{2}{3} \Rightarrow x'x //$ مستقيم مقارب $y=\frac{2}{3}$

$\lim_{x\to\frac{-1}{3}} y = \pm\infty \Rightarrow y'y //$ مستقيم مقارب $x=\frac{-1}{3}$

مشتق كسري = $\frac{\text{مشتق البسط (المقام)} - \text{مشتق المقام (البسط)}}{(\text{المقام})^2}$

$$y' = \frac{2(3x+1)-3(2x-1)}{(3x+1)^2}$$

$$y' = \frac{6x+2-6x+3}{(3x+1)^2} = \frac{5}{(3x+1)^2}$$

مسودة

مشتق المقام $(3x+1)^2 = 2(3)(3x+1)$

$= 6(3x+1)$

$$y'' = \frac{-6(3x+1)(5)}{(3x+1)^4} = \frac{-30}{(3x+1)^3}$$

③

$$y = \frac{3x}{x-2}$$

الحل:

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

التابع كسري فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $R \setminus \{2\}$

$\lim_{x\to\mp\infty} y = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow x'x //$ مستقيم مقارب $y=3$

$\lim_{x\to 2} y = \mp\infty \Rightarrow y'y //$ مقارب $x=2$

مشتق كسري = $\frac{\text{مشتق البسط (المقام)} - \text{مشتق المقام (البسط)}}{(\text{المقام})^2}$

$$y' = \frac{3(x-2)-1(3x)}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{3x-6-3x}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2}$$

مسودة

مشتق المقام $(x-2)^2 = 2(1)(x-2)$

$= 2(x-2)$

$$y'' = \frac{-2(x-2)(-6)}{(x-2)^4} = \frac{+12}{(x-2)^3}$$

②

$$y = \frac{5}{2x-3}$$

الحل:

$2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

التابع كسري فهو معرف ومستمر واشتقاقي على

$$R \setminus \{\frac{3}{2}\}$$

لا يوجد x في البسط

$\lim_{x\to\mp\infty} y = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow x'x$ هو مقارب $y=0$

$\lim_{x\to\frac{3}{2}} y = \mp\infty \Rightarrow y'y //$ مقارب $x=\frac{3}{2}$

$$y' = \frac{-2(5)}{(2x-3)^2} = \frac{-10}{(2x-3)^2}$$

مسودة

مشتق المقام $(2x-3)^2 = 2(2)(2x-3)$

$= 4(2x-3)$

$$y'' = \frac{-4(2x-3)(-10)}{(2x-3)^4}$$

$$y'' = \frac{40}{(2x-3)^3}$$

٢ دورة ٢٠٠٥ ١٢٠ درجة

ليكن التابع : $y = \frac{x-1}{x}$

١) ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني.

٢) اوجد تفاضل التابع واحسب قيمة هذا التفاضل عندما $dx = 0{,}1$ و $x = 2$

زيادة :

٣) اوجد معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x = -1$

٤) اوجد مساحة السطح المحدد بين منحني التابع والمحور $x'x$ والمستقيمين : $x = 1$ و $x =$

الحل :

①

$$y = \frac{x-1}{x}$$

$x = 0$

التابع كسري فهو معرف واشتقاقي على $R/\{0\}$

$\lim_{x\to\pm\infty} y = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ $y = 1$ مستقيم مقارب $\parallel x'x$

$\lim_{x\to 0} y = \pm\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب هو $y'y$

$$y' = \frac{1(x)-1(x-1)}{(x)^2} = \frac{x-x+1}{(x)^2} = \frac{+1}{(x)^2} > 0$$

التابع متزايد تماماً.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

مسودة مشتق المقام $(x)^2$ يساوي

$\underbrace{2(1)}(x) = 2(x)$

$$y'' = \frac{-2(x)(+1)}{(x)^4} = \frac{-2}{x^3}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$+$	‖		
جهة التقعر		y^+	$+\infty$ ‖ $-\infty$	y^-	

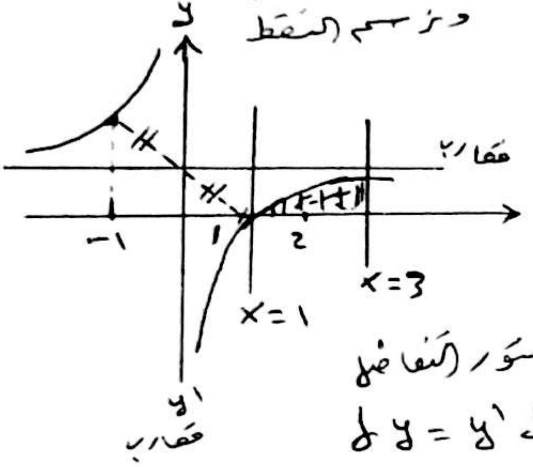
التقاطع مع $y'y$ اي $x = 0$ مستحيل لانها ليست من مجموعة التعريف.

التقاطع مع $x'x$ اي $y = 0$ وضمنه

$\frac{0}{1} = \frac{x-1}{x} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

$\boxed{(1,0)}$

الرسم : نرسم المقاربين ونرسم النقط



② دستور التفاضل

$dy = y'dx$

$$dy = \left(\frac{+1}{x^2}\right)dx$$

نعوض :

$$dy = \left[\frac{+1}{(2)^2}\right](0{,}1) = \frac{1\times 0{,}1}{4} = \frac{1}{40}$$

حل الزيادة ③ و ④

③

$x = -1 ;\ y = \frac{-1-1}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$ A $\boxed{(-1,+2)}$

$y' = \frac{+1}{x^2} \Rightarrow$ ميل المماس $m = \frac{+1}{(-1)^2} = 1$

المماس : $y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 2 = 1(x+1)$

④ السطح المطلوب فوق $x'x$ تكامل نفس التابع نكتب : $y = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 1 - \boxed{\frac{1}{x}}$

له البسط مشتق المقام و $x > 0$ في $[1,3]$ اذن

$$S = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = [x - \ln x]_1^3$$

$$S = [3 - \ln 3] - [1 - \underbrace{\ln 1}_{0}] = 2 - \ln 3$$

٢ دورة ٢٠١٢ || ١٤٠ درجة

ليكن التابع العددي $y = \frac{ax+2}{2x+1}$

① عيّن a إذا علمت أن منحني التابع يمر من النقطة (١,١).

② ادرس تحولات التابع $y = \frac{x+2}{2x+1}$ وارسم خطه البياني في مستوٍ منسوب.

٣) اوجد معادلتي المماس والناظم للخط البياني في النقطة (١,١) منه.

الحل: ①

$$y = \frac{ax+2}{2x+1}$$

$$(\overset{x}{1},\overset{y}{1}): \frac{1}{1} = \frac{a+2}{2+1} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{a+2}{3}$$

$$a+2 = 3 \Rightarrow a = 3-2 = 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

②

$$y = \frac{x+2}{2x+1}$$

$$2x+1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

التابع كسري معرف واشتقاقي على $R \setminus \left\{\frac{-1}{2}\right\}$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}$ مقارب // xx'

$\lim\limits_{x \to \frac{-1}{2}} y = \pm\infty \Rightarrow$ $x = \frac{-1}{2}$ مقارب // $y'y$

$$y' = \frac{1(2x+1) - 2(x+2)}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1-2x-4}{(2x+1)^2}$$

$y' = \frac{-3}{(2x+1)^2} < 0 \Rightarrow$ التابع متناقص تماماً.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

مسودة: مشتق مقام $(2x+1)^2$ يساوي $\underbrace{2(2)}(2x+1) = 4(2x+1)$

$$y'' = \frac{-4\cancel{(2x+1)}(-3)}{(2x+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{12}{(2x+1)^3}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
y''		−	‖	+	
جهة التقعر		y^-	$-\infty$ ‖ $+\infty$	y^+	

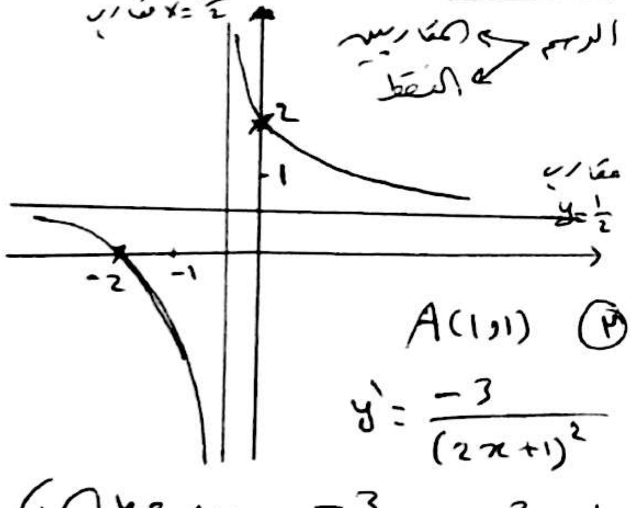
التقاطع مع $y'y$ أي $x=0$ ومنه:

$$y = \frac{0+2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \boxed{(0,2)}$$

التقاطع مع $x'x$ أي $y=0$ ومنه:

$$\frac{0}{1} = \frac{x+2}{2x+1} \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\boxed{(-2,0)}$$



الرسم ← المقاربات
← النقط

③ $A(1,1)$

$$y' = \frac{-3}{(2x+1)^2}$$

ميل المماس $m = \frac{-3}{(2+1)^2} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$

المماس: $y - y_A = m(x - x_A)$

نعوض: $y - 1 = \frac{-1}{3}(x-1)$

ميل الناظم: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{-1}{3}} = \frac{-1}{1} \times \frac{-3}{1}$

$m' = 3 \Rightarrow$

الناظم: $y - y_A = m'(x - x_A)$

نعوض: $y - 1 = 3(x-1)$

٤

دورة ٢٠١٨ الأولى

في مستوٍ منسوب لمعلم

$y = \frac{2x+a}{x}$

١) أوجد قيمة a ليمر الخط البياني للتابع من النقطة $(1,3)$

٢) ادرس تحولات التابع: $y = \frac{2x+1}{x}$ وارسم خطه البياني.

٣) احسب $I = \int_1^2 \frac{2x+1}{x}\,dx$

ثم زيادة من الدورة:

٤) أوجد تفاضل التابع من أجل $x = 1$ و $dx = 0{,}3$

٥) أوجد معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه $A(1,3)$

الحل: ①

$(\overset{x}{1},\overset{y}{3}) : \frac{3}{1} = \frac{2(1)+a}{1} \Rightarrow 2+a=3$

$a = 3-2 \Rightarrow \boxed{a=1}$

②

$y = \frac{2x+1}{x}$

$x = 0$

التابع كسري معرف واشتقاقي على $R|\{0\}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} y = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow$ $y=2$ مقارب // $x'x$

$\lim y = \pm\infty \Rightarrow$ $x=0$ مقارب هو yy'

$y' = \frac{2(x)-1(2x+1)}{(x)^2} = \frac{2x-2x-1}{(x)^2}$

$y' = \frac{-1}{(x)^2} < 0 \Rightarrow$ التابع متناقص تماماً

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

مقلوب مشتق المقام x^2 يساوي $\boxed{2x}$

$y'' = \frac{-2x(-1)}{x^4} = \frac{+2}{x^3}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	‖	$+$	
جهة التقعر		y^-	$-\infty$ ‖ $+\infty$	y^+	

التقاطع مع yy' أي $x=0$ مستحيل لأنه ليست من مجموعة التعريف.

التقاطع مع $y=0$ ومنه: $\frac{0}{1} = \frac{2x+1}{x}$

$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

$\boxed{\left(\frac{-1}{2}, 0\right)}$

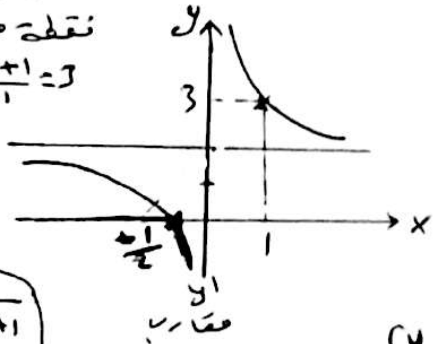
الرسم ← المقاربين

الرسم ← النقط

نقطة مساعدة للرسم

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{2+1}{1} = 3$

$A(1,3)$



٣)

$$\begin{array}{r|l} x & 2x+1 \\ & \underline{2x} \\ & 0+1 \end{array} \quad 2$$

$I = \int_1^2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx$

$\frac{1}{x}$ البسط مشتق المقام و $x>0$ في المجال $[1,2]$

إذن التكامل لغاريتمي

$I = [2x + \ln x]_1^2 = [2(2) + \ln 2] - [2(1) + \ln 1]$

$I = 4 + \ln 2 - 2 = 2 + \ln 2$

٤) دستور التفاضل $dy = y'.dx$

$dy = \frac{-dx}{x^2} = \frac{-0{,}3}{(1)^2} = -0{,}3$

٥) $A(1,3)$ ، $y' = \frac{-1}{x^2}$

$m = \frac{-1}{(1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$

دستور المماس: $y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 3 = -1(x-1)$

٥ اولاً: لدينا $y=\frac{ax+4}{x-2}$

اوجد a علماً ان منحني التابع يمر بالنقطة $A(1,-6)$

ثانياً: لدينا الت.ع: $y=\frac{2x+4}{x-2}$

① ادرس تحولات الت.ع وارسم خطه البياني.

② اوجد تفاضل الت.ع من اجل: $x=4$ و $dx=0,2$

③ اوجد معادلة المماس لمنحني الت.ع في نقطة منه فاصلتها $x=3$.

④ اوجد مساحة السطح المحدد بمنحني الت.ع والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=4$ و $x=3$

الحل: اولاً:

$A(1,-6):\ \frac{-6}{1}=\frac{a+4}{1-2}$

$\frac{-6}{1}=\frac{a+4}{-1}\Rightarrow a+4=6\Rightarrow a=6-4=2$

ثانياً:

$y=\frac{2x+4}{x-2}$

①

$x-2=0\Rightarrow x=2$

التابع كسري معرف واشتقاقي على $R/\{2\}$

$\lim_{x\to\mp\infty} y=\frac{2}{1}=2\Rightarrow$ $y=2$ مقارب // $x'x$

$\lim_{x\to 2} y=\pm\infty\Rightarrow$ $x=2$ مقارب // $y'y$

$y'=\frac{2(x-2)-1(2x+4)}{(x-2)^2}=\frac{2x-4-2x-4}{(x-2)^2}$

$y'=\frac{-8}{(x-2)^2}<0\Rightarrow$ التابع متناقص تماماً

x	$-\infty$	2	∞
y'		$\|\|$	
y	$2\searrow-\infty$	$\|\|$	$+\infty\searrow 2$

صورة مشتق المقام $(x-2)^2$ يساوي

$\underbrace{2(1)}(x-2)=2(x-2)$

$y''=\frac{-2\cancel{(x-2)}(-8)}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{+16}{(x-2)^3}$

x	$-\infty$	2	∞
y''	$-$	$\|\|$	$+$
جهة التقعر	y^-	$-\infty\ \|\|\ +\infty$	y^+

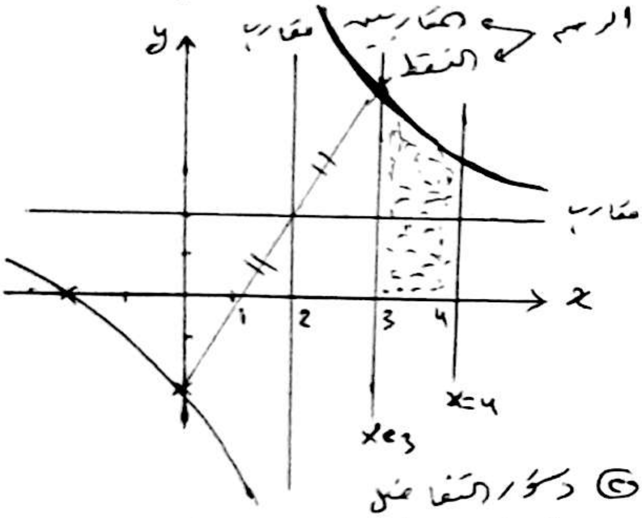
التقاطع مع $y'y$ اي $x=0$ ومنه:

$y=\frac{0+4}{0-2}=\frac{4}{-2}=-2$ $\boxed{(0,-2)}$

التقاطع مع $x'x$ اي $y=0$ ومنه:

$\frac{0}{1}=\frac{2x+4}{x-2}\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow 2x=-4$

$x=\frac{-4}{2}=-2$ $\boxed{(-2,0)}$



② دستور التفاضل

$dy=y'.dx$

$dy=\frac{-8dx}{(x-2)^2}$

$dy=\frac{-8(0,2)}{(4-2)^2}=-2(0,2)=-0,4$

③

$x=3:\ y=\frac{6+4}{3-2}=\frac{10}{1}=10$ $\boxed{A(3,10)}$

$y'=\frac{-8}{(x-2)^2}$

ميل المماس $m=\frac{-8}{(3-2)^2}=\frac{-8}{1}=-8$

المماس:

$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-10=-8(x-3)$

④

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x-2 & 2x+4 \\ & \mp 2x \mp 4 \\ \hline & 8 \end{array}$$

$y=2+\frac{8}{2x+4}$

السطح المطلوب يقع فوق $x'x$ كاملاً تحت الت.ع

$S=\int_3^4[2+4(\frac{1}{x+2})]dx$

$\frac{1}{x+2}$ البسط مشتق المقام) تكامله نفس لغاريتم (ln)

$S=[2x+4\ln(x+2)]_3^4=[8+4\ln6]-[6+4\ln5]=2+4\ln6-4\ln5$

٦ دورة ٢٠٠٧ | ٤٠ درجة

أوجد تفاضل التابع: $y = \frac{2x+3}{x-1}$

حيث $x \neq 1$

الحل: دستور التفاضل: $dy = y' \cdot dx$

$$y' = \frac{2(x-1) - 1(2x+3)}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

اذن: $dy = \frac{-5\,dx}{(x-1)^2}$

٧ أوجد تفاضل التابع: دورة ٢٠٠٩ | ٤٠ درجة

$y = \frac{2x+1}{x-3}$; $x \neq 3$

الحل: دستور التفاضل: $dy = y' \cdot dx$

$$y' = \frac{2(x-3) - 1(2x+1)}{(x-3)^2}$$

$$y' = \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$$

اذن: $dy = \frac{-7\,dx}{(x-3)^2}$

٨ مثال محلول بالكتاب صفحة ١١٨

$y = \frac{2x+3}{x-1}$

١) ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني.

٢) اوجد معادلتي المماس والناظم لهذا الخط في النقطة $A(0,-3)$ منه.

الحل بالكتاب صفحة ١١٨ - ١٢١

٩ $y = \frac{ax+2}{3x+1}$

① عين a حتى يكون التابع كسرياً تناظرياً

② عين a كي يمر الخط البياني بالنقطة $(-1,1)$

③ ادرس تحولات التابع $y = \frac{-x+2}{3x+1}$ وارسم خطه البياني؟

الحل: ① الشرط التناظري $a \cdot b' - a' b \neq 0$

$a(1) - 3(2) \neq 0 \Rightarrow a \neq 6$

٢) $(\overset{x}{-1},\overset{y}{1})$: $\frac{1}{1} = \frac{-a+2}{-3+1}$

$-a+2 = -3+1 \Rightarrow -a = -4$

$a = \frac{-4}{-1} = 4$

٣) $y = \frac{-x+2}{3x+1}$

انظر الحل في الكتاب صفحة ١٢١ - ١٢٤

١٠ لدينا التابع: $y = \frac{2x-1}{x+2}$

المطلوب: ١) اوجد مجموعة التعريف،

٢) اوجد معادلتي المستقيمين المقاربين

٣) اوجد المشتق الاول،

الحل: ١) $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

التابع كسري معرف واشتقاقي على $R/\{-2\}$

٣) $y' = \frac{2(x+2) - 1(2x-1)}{(x+2)^2}$

$$y' = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \frac{+5}{(x+2)^2}$$

②

$\lim_{x \to \mp\infty} y = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow$

$y = 2$ مستقيم مقارب $// x'x$

$\lim_{x \to -2} y = \pm\infty$

اذن $x = -2$ مستقيم مقارب $// y'y$

المهندس محمد كريم

درعا - شرقي المجمع الحكومي

شمال مدرسة الألسن

التفاضل

دستور التفاضل: $dy = y' . dx$

① إذا كانت التابع العددي $y = 5x^2 + 7$

أوجد Δy و dy ثم $\Delta y - dy$

من أجل: $dx = 0{,}1$ و $x = 2$

الحل:

$x_1 = 2 ; y_1 = 5(2)^2 + 7$

$y_1 = 20 + 7 = 27$

$x_2 = 2{,}1 : y_2 = 5(2{,}1)^2 + 7$

$y_2 = 5(4{,}41) + 7 = 22{,}05 + 7 = 29{,}05$

$\Delta y = y_2 - y_1 = 29{,}05 - 27 = 2{,}05$

$dy = y' dx \Rightarrow dy = (10x) dx$

$dy = (10 \times 2)(0{,}1) = 20 \times 0{,}1 = 2$

$\Delta y - dy = 2{,}05 - 2 = 0{,}05$

② أوجد تفاضل كلاً من التوابع الآتية

① $y = 3x^2 - 5x + 1$

الحل: الدستور: $dy = y' . dx$

$dy = (6x - 5) dx$

② $y = \sin 5x$

الحل: الدستور: $dy = y' dx$

$dy = 5 \cos 5x \, dx$

③ $y = \cos 5x$

الحل: الدستور $dy = y' . dx$

$dy = -5 \sin 5x \, dx$

④ $y = \sqrt{3x^2 + 5x}$

الحل: دستور التفاضل: $dy = y' . dx$

$$d = \frac{(6x+5)dx}{2\sqrt{3x^2+5x}}$$

⑤ $y = \sin 2x + \cos 3x$

الحل: دستور التفاضل $dy = y' . dx$

$dy = (2\cos 2x - 3\sin 3x) dx$

⑥ دورة ٢٠٠٦ ٤٠ درجة

أوجد تفاضل التابع: $y = \sin 3x + \cos 2x$

الحل: دستور التفاضل $dy = y' . dx$

$dy = (3\cos 3x - 2\sin 2x) dx$

⑦ دورة ٢٠٠٧ ٤٠ درجة

أوجد تفاضل التابع: $y = \frac{2x+3}{x-1} ; x \neq 1$

الحل: دستور التفاضل: $dy = y' . dx$

$$y' = \frac{2(x-1) - 1(2x+3)}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2x - 2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

إذاً: $dy = \frac{-5 \, dx}{(x-1)^2}$

⑧ دورة ٢٠٠٩ ٤٠ درجة

أوجد تفاضل التابع: $y = \frac{2x+1}{x-3} : x \neq 3$

الحل: دستور التفاضل: $dy = y' . dx$

$$y' = \frac{2(x-3) - 1(2x+1)}{(x-3)^2}$$

$$y' = \frac{2x - 6 - 2x - 1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$$

إذاً: $dy = \frac{-7 \, dx}{(x-3)^2}$

⑨ اوجد تفاضل التابع: $y = e^{3x} + e^{x}$

الحل: دستور التفاضل: $dy = y'.dx$

$dy = (3e^{3x} + e^{x})dx$

⑩ اوجد تفاضل التابع: $y = \ln(x^2+1) + \ln x$; $D =]0,\infty[$

الحل: دستور التفاضل: $dy = y'.dx$

$dy = \left[\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x}\right]dx$

تطبيقات التفاضل: حل كلاً مما يلي:

٢

① باستخدام التفاضل أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{15,9}$

الحل: نفرض $x = 16$ و $y = \sqrt{x}$ ومنه

$dx = 16 - 15,9 = 0,1$

$dy = y'dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{0,1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{80}$

$\sqrt{15,9} = \sqrt{16} - dy$

$= \frac{4}{1}_{20} - \frac{1}{80}_{1} = \frac{320}{80} - \frac{1}{80} = \frac{319}{80}$

$\simeq 3,9875$

② مكعب مصنوع من الخشب سماكة الخشب 0,2 cm وطول ضلع المكعب = 6 cm

1) اوجد القيمة التقريبية لمساحة السطح الكلي للخشب علماً ان دستور السطح الكلي للمكعب: $A = 6x^2$

2) اوجد القيمة التقريبية لتغير حجم المكعب، علماً ان دستور حجم المكعب $V = x^3$

الحل: 1)

$dA = A'.dx$

$dA = (12x)dx = (12(6))(0,2)$

$dA = 72(0,2) = 14,4 \text{ cm}^2$

$A = 6(6)^2 = 6(36) = 216 \text{ cm}^2$

اذن

$A + dA = 216 + 14,4 = 230,4 \text{ cm}^2$

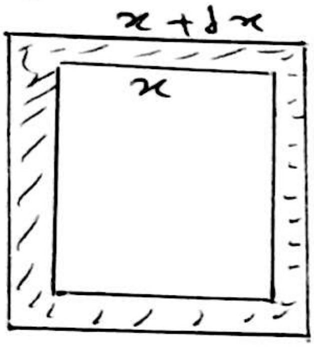
② $dv = (3x^2)dx$

$dv = (3(6)^2)(0,2) = 72(0,2)$

$dv = 21,6 \text{ cm}^3$

③ ٤٠ درجة | دورة ٢٠١١

مربع طول ضلعه (8 cm) تمدد بتأثير الحرارة فازداد طول الضلع بمقدار 0,2 cm . أوجد مستخدماً مفهوم التفاضل القيمة التقريبية لتغير مساحة المربع.



الحل:

مساحة المربع

$y = x^2$

$x = 8$

$dx = 0,2$

$dy = y'.dx = 2x\,dx$

$dy = 2(8)(0,2) = 3,2 \text{ cm}^2$

④ ٤٠ درجة دورة ٢٠١٢

لدينا مكعب مصنوع من الخشب سماكة الخشب 0,2 cm وطول ضلع المكعب 6 cm اوجد القيمة التقريبية لمساحة السطح الكلي علماً ان دستوره $y = 6x^2$ و x طول ضلع المكعب.

الحل:

$dy = y'.dx$

$dy = (12x)dx = (12 \times 6)(0,2)$

$dy = 14,4 \text{ cm}^2$

$y = 6x^2 = 6(6)^2 = 216 \text{ cm}^2$

اذن:

$y + dy = 216 + 14,4$

$= 230,4 \text{ cm}^2$

نهايات التوابع والمستقيمات المقاربة

١ أوجد نهاية كل تابع عند ∞+ , ∞- .

(١ $y = \frac{2x^4 + x - 5}{x^2 + 1}$

الحل: عند ∞- نجد $\frac{\infty}{\infty}$ ح.ع.ت نزيلها ونعوض في تابع مستمد اعلى أس ٤ أس ٢ في البسط في المقام

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} (2x^2) = +\infty$$

عند ∞+ نجد $\frac{\infty}{\infty}$ ح.ع.ت نزيلها بأن نعوض في تابعة مستمدة أعلى أس في البسط مع أعلى أس في المقام .

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} (2x^2) = +\infty$$

(٢ $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + 1}$

الحل: عند ∞- نجد $\frac{\infty}{-\infty}$ ح.ع.ت نزيلها بأن نعوض في تابع مستمد أعلى أس في البسط مع أعلى أس في المقام)

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

عند ∞+ بنفس الطريقة نجد

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(٣ . $y = \frac{4x^3 - x + 1}{5x^3 + x^2 + 3}$

الحل:

عند ∞± نجد $\frac{\infty}{\infty}$ ح.ع.ت نزيلها بأن نعوض في تابع مستمد اعلى أس في البسط على اعلى أس في المقام اس:

$$\lim_{x \to \mp\infty} y = \frac{4}{5}$$

المهندس محمد كريم ٠٩٤٤٤٣٢٦٣٣٣

٢ اوجد نهاية التابع $y = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ عند الصفر .

الحل: عند الصفر نجد $\frac{0}{0}$ ح.ع.ت نزيلها بأن نضرب البسط والمقام بمرافق البسط:

$$y = \frac{[\sqrt{x+1} - 1][\sqrt{x+1} + 1]}{x[\sqrt{x+1} + 1]}$$

$$y = \frac{x + 1 - 1}{x[\sqrt{x+1} + 1]} = \frac{x}{x[\sqrt{x+1} + 1]}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$\lim_{x \to 0} y = \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

٣ ليكن التابع: $y = \frac{3x^2 + 5x + 2}{x - 1}$

اوجد المستقيم المقارب المائل لمنحني التابع .

الحل:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} (3x) = \pm\infty$$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل:

$$y = mx + c$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2}\right) = 3$$

$$c = \lim_{x \to \pm\infty} (y - 3x)$$

$$c = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x + 2}{x - 1} - \frac{3x}{1}\right)$$

$$c = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x + 2 - 3x^2 + 3x}{x - 1}\right)$$

$$c = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{8x + 2}{x - 1} = 8$$

معادلة المستقيم المقارب المائل: $y = 3x + 8$

٤ اوجد مجموعة تعريف التابع واوجد المقارب الشاقولي وبرهان للتابع لا يوجد مقارب مائل بل منحني مقارب لـ $x'x$

$$y = \ln(2x+3)$$

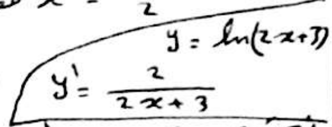
الحل: التابع معرف بشرط $2x+3>0$

$2x > -3 \Rightarrow x > \frac{-3}{2}$

معرف ع $\left]\frac{-3}{2}, \infty\right[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{3}{2}} y = \ln 0^{+} = -\infty$

اذن $x = \frac{-3}{2}$ مقارب // $y'y$



$\lim\limits_{x \to \infty} y = +\infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y = mx + c$

$m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

ع.ف.ت نزيل الوضع اوبيتال نشتق البسط فقط ونشتق المقام فقط

$m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{2x+3}}{1} = 0$

للمنحني منحني مقارب هو منحني $x x'$

٥ لدينا التابع $y = e^{-2x}$

● اوجد مجموعة تعريفه ونهاياته عند $\mp\infty$ وبيّن أن للتابع مقارب هو منحني $y'y$ ويوجد مقارب أفقي اوجد معادلته

الحل: ١) التابع معرف ع $R =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$

$y=0$ مقارب أفقي هو $x'x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^{\infty} = \infty$

نبحث عن مقارب مائل من الشكل $y = mx + c$

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

ع.ف.ت نزيل الوضع اوبيتال نشتق البسط فقط ونشتق (المقام) فقط نجد

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \frac{-2e^{-2x}}{1} = -\infty$

للمنحني منحني مقارب هو منحني $y'y$.

$y = e^{-2x} \Rightarrow y' = -2e^{-2x}$

٦ دورة ٢٠١٨

لدينا التابع: $y = \ln(9-x^2)$

اوجد مجموعة تعريفه ثم مشتقه.

الحل: معرف بشرط $9-x^2>0$

$9-x^2=0 \Rightarrow 9=x^2$

إما $x=-3$ أو $x=+3$

	$-\infty$ … -3	-3 … $+3$	$+3$ … $+\infty$
$-x^2$ →	xxxx	+ محقق	xxxx

التابع معرف ع $x \in]-3,+3[$

مشتقه: $y' = \frac{-2x}{9-x^2}$

٧ دورة ٢٠١٧

لدينا التابع $y = \ln(x^2-9)$

اوجد مجموعة تعريفه ثم اوجد مشتقه.

الحل: التابع معرف بشرط: $x^2-9>0$

$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9$

إما $x=-3$ أو $x=+3$

	$-\infty$ … -3	-3 … $+3$	$+3$ … $+\infty$
x^2 →	+ محقق	− xxxxx	+ محقق

التابع معرف ع

$x \in]-\infty,-3[\cup]+3,\infty[$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2-9}$

$y = e^{x^2+1} + \ln(x^2+1) + \sqrt{x^2+1}$

اوجد y' على R

الحل: $y = (2x)e^{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

التكامل ٤

١ أنجز كلاً مما يلي

① $I=\int(3x^4-2x^3+5x^2-x+1)\,dx$

الحل: نضيف للأس واحد ونقسم على الأس الجديد

$I=\frac{3x^5}{5}-\frac{2x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

② $I=\int\left(x^2-\frac{2}{x^4}+3\right)dx$

الحل

$I=\int(x^2-2x^{-4}+3)\,dx$ نضيف للأس واحد ونقسم على الأس الجديد

$I=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^{-3}}{-3}+3x+c$

$I=\frac{x^3}{3}+\frac{2x^{-3}}{3}+3x+c$

قاعدة: $\int(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)(a)}$

تكامل درجة أولى نضيف للأس واحد ونقسم على الأس الجديد ونقسم أيضاً على a أمثال x.

٣) $I=\int(2x-3)^5\,dx$

الحل:

$I=\frac{(2x-3)^6}{6(2)}+c$

٤) الحل: $I=\sqrt[3]{2x+1}\,dx=(2x+1)^{\frac{3}{2}}$

$I=\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}+1}}{(\frac{3}{2}+1)(2)}+c=\frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{4}{3}}+c$

٥) $I=\int(2\cos 3x+5\sin 4x)\,dx$

الحل:

$I=\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{5}{4}\cos 4x+c$

٦) $I=\int\sin^2 3x\,dx$

الحل:

$I=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(6x)\right)dx$

$I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+c$

٧) $I=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$

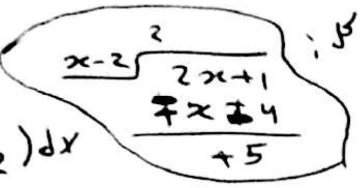
٨) $I=\int\frac{2}{x+1}\,dx$

الحل:

$I=2\int\frac{1}{x+1}\,dx=2\ln|x+1|+c$

٩) $I=\int\frac{2x+1}{x-2}\,dx$

الحل:



$I=\int\left(2+\frac{5}{x-2}\right)dx$

$I=2x+5\ln|x-2|+c$

دستور التكامل المحدود:

$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

٢ أوجد ناتج ما يلي:

① $I=\int_{-1}^{2}(3x^2-3x)\,dx$

الحل بالكتاب صفحة ١٤٠

② $I=\int_1^2(2x-1)^2\,dx$

الحل بالكتاب صفحة ١٤٠

٣) $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$

الحل بالكتاب صفحة ١٤٠

④ $I=\int_0^1 3e^{3x}\,dx$

الحل: $I=\left[e^{3x}\right]_0^1=e^3-e^0=e^3-1$

٥) دورة ٢٠١١ أوجد ناتج

$I=\int_0^1 2e^{2x}\,dx$

الحل: $I=\left[e^{2x}\right]_0^1=e^2-e^0=e^2-1$

٦) دورة ٢٠١٢ أوجد ناتج $I=\int_1^2(x^2-x)\,dx$

الحل:

$I=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$I=\left[\frac{8}{3}{\scriptstyle 2}-\frac{4}{2}{\scriptstyle 3}\right]-\left[\frac{1}{3}{\scriptstyle 2}-\frac{1}{2}{\scriptstyle 3}\right]$

$I=\frac{16}{6}-\frac{12}{6}-\left(\frac{2-3}{6}\right)=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

الاحتمالات

الحدث الابتدائي : هو حدث مكون من عنصر واحد فقط .

الحدث الأكيد : هو حدث احتماله واحد أي $P(\Omega)=1$

الحدث المستحيل : هو حدث مستحيل الوقوع أي احتماله صفر $P(\phi)=0$

A و A' حدثان متضادان يحققان

$$P(A)+P(A')=1$$

$$P(A)=1-P(A')$$

$$P(A')=1-P(A)$$

احتمال اي حدث A :

$$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الموافقة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$P(A)=\frac{\text{توافيق الحالات الموافقة}}{\text{توافيق الحالات الممكنة}}$$

توافيق : بطاقات - كرات - مصابيح كان ـ ـ ـ ـ ـ ـ

جملة على الأقل : المطلوب بزيادة

جملة على الأكثر : المطلوب بالنقصان

السحب معاً : تعني توافيق

وَ : حيد او		أداة جمع
وَ : ضرب	/	الفاصلة : جمع

تابع احتمال : اذا تحقق شرطين هما :

1) احتمال كل حدث : $P(A)\in[0,1]$

2) مجموعة جميع الاحداث يساوي الواحد .

---

① دورة ٢٠٠٥ ((٧٠ درجة))

يحوي كيس 7 بطاقات متماثلة مرقمة كمايلي : 7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 نسحب من الكيس عشوائياً بطاقتين معاً . والمطلوب :

1) ما احتمال ان تحمل كل من البطاقتين المسحوبتين رقماً زوجياً ؟

2) ما احتمال ان يكون مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين عدداً فردياً ؟

3) طلب زيادة : ما احتمال ان تحمل كل من البطاقتين المسحوبتين رقماً فردياً ؟

4) طلب زيادة ما احتمال ان يكون مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين عدداً زوجياً ؟

الحل :

البطاقات	ف	ز	السحب
7	4	3	2 معاً

1) نفرض الحدث A ان تحمل كل منهما رقماً زوجياً

$$P(A)=\frac{c(3,2)}{c(7,2)}=\frac{\frac{3\times2}{2\times1}}{\frac{7\times6}{2\times1}}=\frac{3}{21}$$

2) نفرض الحدث B مجموعهما فردياً

$$P(B)=\frac{\overset{ز}{c(3,1)}\cdot\overset{ف}{c(4,1)}}{c(7,2)}=\frac{\frac{3}{1}\times\frac{4}{1}}{21}=\frac{12}{21}$$

3) نفرض الحدث c ان تحمل كل منهما رقماً فردياً

$$P(c)=\frac{c(4,2)}{c(7,2)}=\frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{7\times6}{2\times1}}=\frac{6}{21}$$

4) نفرض الحدث D مجموعهما زوجيا ف ف او ز ز

$$P(D)=\frac{c(3,2)+c(4,2)}{P(7,2)}=\frac{3+6}{21}=\frac{9}{21}$$

② دورة ٢٠٠٦ ٧٠ درجة

تتألف الهيئة الفنية لأحد المعامل من 12 شخصاً منهم 8 مهندسين و 4 خبراء ، فإذا رغب مدير المعمل تشكيل لجنة من ثلاثة أشخاص من تلك الهيئة والمطلوب:

١) احسب احتمال أن تكون اللجنة من 3 خبراء

٢) احسب احتمال أن تضم اللجنة مهندساً واحداً فقط.

③ طلب زيادة: ٢) احسب احتمال أن يكون في اللجنة مهندس على الأقل.

④ طلب زيادة: أ احسب احتمال أن يكون في اللجنة خبير واحد على الأكثر.

الحل:

الهيئة	م	خ	اللجنة
12	8	4	3

١) نفرض الحدث A اللجنة من 3 خبراء

$$P(A) = \frac{C(4,3)}{C(12,3)} = \frac{\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}}{\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}} = \frac{4}{220}$$

② نفرض الحدث B مهندساً واحداً وخبيرين

$$P(B) = \frac{C(4,2)\cdot C(8,1)}{C(12,3)} = \frac{\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{8}{1}}{220}$$

$$P(B) = \frac{48}{220}$$

٢) نفرض الحدث C في اللجنة مهندس على الأقل

$$\underbrace{\text{خ خ خ}}_{C'=A} \text{ ، } \underbrace{\text{خ خ م ، خ م م ، م م م}}_{C}$$

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - P(A)$$

$$P(C) = \frac{220}{220} - \frac{4}{220} = \frac{216}{220}$$

٤) نفرض الحدث D في اللجنة خبير واحد على الأكثر

$$\text{خ خ خ ، خ خ م ، } \underbrace{\text{خ م م ، م م م}}_{D}$$

$$P(D) = \frac{C(8,3) + C(8,2)\cdot C(4,1)}{C(12,3)}$$

$$P(D) = \frac{\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} + \frac{8\times7}{2\times1}\cdot\frac{4}{1}}{220}$$

$$P(D) = \frac{56+112}{220} = \frac{168}{220}$$

② دورة ٢٠٠٧ ٧٠ درجة

تحوي علبة ١٠ كرات منها 4 كرات حمراء و 6 كرات بيضاء ، نسحب كرتين من العلبة معاً عشوائياً ، والمطلوب:

١) ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين؟

٢) ما احتمال أن تكون إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل حمراء؟

زيادة: ٢) ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين؟

زيادة: ٤) ما احتمال أن تكون إحدى الكرتين المسحوبتين على الأكثر حمراء.

الحل:

الكرات	ح	ب	السحب
١٠	4	6	2 معاً

١) نفرض الحدث A الكرتين المسحوبتان حمراوين

$$P(A)=\frac{C(4,2)}{C(10,2)}=\frac{\frac{4(3)}{2(1)}}{\frac{10(9)}{2(1)}}=\frac{6}{45}$$

٢) نفرض الحدث B أن تكون احدى الكرتين المسحوبتين على الاقل حمراء

$$\underbrace{\text{ح ح ، ح ب}}_{B}\text{ ، ب ب}$$

$$P(B)=\frac{C(6,1)\cdot C(4,1)+C(4,2)}{C(10,2)}$$

$$P(B)=\frac{\frac{6}{1}\times\frac{4}{1}+6}{45}=\frac{24+6}{45}=\frac{30}{45}$$

٣) زيادة: نفرض الحدث C الكرتان المسحوبتان بيضاوين

$$P(C)=\frac{C(6,2)}{C(10,2)}=\frac{\frac{6(5)}{2(1)}}{45}=\frac{15}{45}$$

④ زيادة: نفرض الحدث D ان تكون احدى الكرتين المسحوبتين على الأكثر حمراء.

$$\text{ح ح ، }\underbrace{\text{ح ب ، ب ب}}_{D}$$

$$P(D)=\frac{C(6,2)+C(6,1)\cdot C(4,1)}{C(10,2)}$$

$$P(D)=\frac{15+24}{45}=\frac{39}{45}$$

---

④ دورة ٢٠٠٩ ٨٠ درجة

يوجد في صندوق 7 مصابيح منها (3) غير صالحة، نسحب عشوائياً من الصندوق مصباحين معاً والمطلوب:

١) ما احتمال ان يكون المصباحات المسحوبات غير صالحين؟

② ما احتمال ان يكون احد المصباحين على الاقل غير صالح؟

زيادة ③ ما احتمال ان يكون المصباحان المسحوبات صالحين؟

زيادة ④ ما احتمال ان يكون أحد المصباحين المسحوبين على الأكثر غير صالح؟

زيادة ⑤ ما احتمال ان يكون المصباحين من نوع واحد؟

الحل:

المصابيح	غ	ص	السحب
7	3	4	2 معاً

١) نفرض الحدث A المصباحان المسحوبان غير صالحين (غ غ)

$$P(A)=\frac{C(3,2)}{C(7,2)}=\frac{\frac{3(2)}{2(1)}}{\frac{7(6)}{2(1)}}=\frac{3}{21}$$

٢) نفرض الحدث B احد المصباحين على الاقل غير صالح

$$\underbrace{\text{غ غ ، غ ص}}_{B}\text{ ، ص ص}$$

$$P(B)=\frac{C(4,1)\cdot C(3,1)+C(3,2)}{C(7,2)}$$

$$P(B)=\frac{12+3}{21}=\frac{15}{21}$$

٣) نفرض الحدث C المصباحان صالحين (ص ص)

$$P(C)=\frac{C(4,2)}{C(7,2)}=\frac{\frac{4(3)}{2(1)}}{21}=\frac{6}{21}$$

٤) نفرض الحدث D أحد المصباحين على الأكثر غير صالح. غ غ ،

$$\underbrace{\text{غ ص ، ص ص}}_{D}$$

(6+12)

$$P(D)=\frac{C(4,2)+C(4,1)\cdot C(3,1)}{CC}=\frac{18}{21}$$

٥) نفرض الحدث E .... غ غ أو ص ص

$$P(E)=\frac{C(4,2)+C(3,2)}{C(7,2)}=\frac{6+3}{21}=\frac{9}{21}$$

⑤ دورة ٢٠١٠ ٨٠ درجة

يوجد في صندوق (7 كرات) متماثلة منها 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، نسحب عشوائياً من الصندوق كرتين معاً والمطلوب :

١) ما احتمال ان تكون الكرتين حمراوين ؟

٢) ما احتمال ان تكون إحداهما حمراء والأخرى بيضاء ؟

٣) ما احتمال ان تكون إحدى الكرتين على الأقل بيضاء ؟

زيادة : ④ ما احتمال ان تكون الكرتين من لون واحد ؟

زيادة : ⑤ ما احتمال ان تكون إحدى الكرتين على الأكثر بيضاء ؟

الحل :

الكرات :	ح	ب	السحب
7	4	3	2 معاً

١) نفرض الحدث A الكرتين حمراوين ؟؟

$$P(A)=\frac{C(4,2)}{C(7,2)}=\frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{7\times6}{2\times1}}=\frac{6}{21}$$

٢) نفرض الحدث B احداهما حمراء والأخرى بيضاء

ب ح

$$P(B)=\frac{C(4,1)\cdot C(3,1)}{C(7,2)}=\frac{\frac{4}{1}\times\frac{3}{1}}{21}=\frac{12}{21}$$

٣) نفرض الحدث C احدى الكرتين على الأقل بيضاء

$$\text{ح ح ، }\underbrace{\text{ح ب ، ب ب}}_{C}$$

$$P(C)=\frac{C(3,2)+C(3,1)\cdot C(4,1)}{C(7,2)}$$

$$P(C)=\frac{\frac{3\times2}{2\times1}+\frac{3}{1}\times\frac{4}{1}}{21}=\frac{2+12}{21}=\frac{15}{21}$$

٤) نفرض الحدث D الكرتين من لون واحد

ح ح أو ب ب

$$P(D)=\frac{C(3,2)+C(4,2)}{C(7,2)}=\frac{\boxed{3+6}}{21}$$

⑤ نفرض الحدث E إحدى الكرتين على الأكثر بيضاء .

$$\underbrace{\text{ح ح ، ح ب}}_{E}\text{ ، ب ب}$$

$$P(E)=\frac{C(3,1)\cdot C(4,1)+C(4,2)}{C(7,2)}$$

$$P(E)=\frac{12+6}{21}=\frac{18}{21}$$

⑥ نرمي حجر النرد المعروف مرة واحدة والمطلوب :

١) اكتب فضاء العينة .

٢) اكتب A الحدث الوجه الظاهر زوجي ؟ وما احتماله ؟

٣) اكتب B الحدث الوجه الظاهر اولي وما احتماله ؟

٤) اكتب C الحدث الوجه الظاهر أكبر تماماً من 4 وما احتماله ؟

٥) اوجد احتمال ظهور العدد 8 ؟

الحل : ١) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

٢) $A=\{2,4,6\}\Rightarrow P(A)=\frac{\text{المواتية}}{\text{الممكنة}}=\frac{3}{6}$

٣) $B=\{2,3,5\}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{6}$

٤) $C=\{5,6\}\Rightarrow P(C)=\frac{\text{المواتية}}{\text{الممكنة}}=\frac{2}{6}$

٥) $\emptyset$ حدث مستحيل

$$P(\emptyset)=0$$

⑦ دورة ٢٠١١ الثانية

تتألف الهيئة الفنية لأحد المعامل من (12) شخصاً منهم (8) مهندسين و 4 خبراء فإذا علمنا أن المدير يريد تشكيل لجنة من ثلاثة أشخاص من تلك الهيئة والمطلوب:

① ما احتمال أن تكون اللجنة من (3) مهندسين.

② احسب احتمال أن يكون في اللجنة مهندسين اثنين على الأقل.

زيادة: ③ احسب احتمال أن يكون في اللجنة خبير واحد فقط.

الحل:

الهيئة	م	خ	اللجنة
12	8	4	3

① نفرض الحدث A اللجنة 3 مهندسين (ممم)

$$P(A)=\frac{C(8,3)}{C(12,3)}=\frac{\frac{8(7)(6)}{3(2)(1)}}{\frac{(12)(11)(10)}{3(2)(1)}}=\frac{56}{220}$$

② على الأقل المطلوب (زيادة

نفرض الحدث B في اللجنة مهندسين اثنين على الأقل.

$$\underbrace{\text{ممم ، ممخ}}_{B} \text{ ، مخخ ، خخخ}$$

$$P(B)=\frac{C(4,1)\,C(8,2)+C(8,3)}{C(12,3)}$$

$$P(B)=\frac{\frac{4}{1}\times\frac{8\times7}{2\times1}+56}{220}=\frac{\overset{\boxed{112+56}}{168}}{220}$$

③ نفرض الحدث C في اللجنة خبير واحد ومهندسين (خمم)

$$P(C)=\frac{C(8,2)\,C(4,1)}{C(12,3)}=\frac{\overset{\boxed{28\times4}}{112}}{220}$$

⑧ دورة ٢٠١٢

تحتوي علبة على عشر كرات منها (4) كرات حمراء و (6) كرات بيضاء نسحب من العلبة كرتين معاً بشكل عشوائي. والمطلوب:

1) ما احتمال أن تكون الكرتين حمراوين؟

2) ما احتمال أن تكون الكرتين بيضاوين؟

3) ما احتمال أن تكون الكرتان مختلفتان باللون

زيادة ④ ما احتمال أن تكون الكرتان من لون واحد.

الحل:

الكرات	ح	ب	السحب
10	4	6	كرتين معاً

1) نفرض الحدث A الكرتين حمراوين (حح)

$$P(A)=\frac{C(4,2)}{C(10,2)}=\frac{\frac{4(3)}{2(1)}}{\frac{10(9)}{2(1)}}=\frac{6}{45}$$

2) نفرض الحدث B الكرتين بيضاوين (ب ب)

$$P(B)=\frac{C(6,2)}{C(10,2)}=\frac{\frac{6(5)}{2(1)}}{45}=\frac{15}{45}$$

3) نفرض الحدث C أن تكون الكرتين مختلفتين باللون (ح ب)

$$P(C)=\frac{C(6,1)\cdot C(4,1)}{C(10,2)}=\frac{\frac{6}{1}\times\frac{4}{1}}{45}=\frac{24}{45}$$

4) نفرض الحدث D الكرتان من لون واحد

حح $\underset{+}{\text{أو}}$ ب ب

$$P(D)=\frac{C(6,2)+C(4,2)}{C(10,2)}$$

$$P(D)=\frac{\frac{6(5)}{2(1)}+\frac{4(3)}{2(1)}}{45}=\frac{\overset{\boxed{15+6}}{21}}{45}$$

⑨ دورة ٢٠١٦

تتألف الهيئة الفنية لأحد المعامل من 12 شخصاً، {7 مهندسين و 5 خبراء} ونريد تشكيل لجنة منهم مؤلفة من شخصين.

والمطلوب:

① بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من مهندسين فقط.

② ما احتمال أن تضم اللجنة خبيرين فقط

٣) ما احتمال أن تضم اللجنة مهندساً واحداً على الأقل.

زيادة: ④ ما احتمال أن تضم اللجنة مهندساً واحداً على الأكثر.

الحل:

الهيئة	م	خ	اللجنة
12	7	5	2

① نفرض الحدث A اللجنة مهندسين فقط (م م)

$$P(A)=\frac{C(7,2)}{C(12,2)}=\frac{\frac{7(6)}{2(1)}}{\frac{12(11)}{2(1)}}=\frac{21}{66}$$

② نفرض الحدث B اللجنة خبرين فقط (خ خ)

$$P(B)=\frac{C(5,2)}{C(12,2)}=\frac{\frac{5(4)}{2(1)}}{\frac{12(11)}{2(1)}}=\frac{10}{66}$$

٣) نفرض الحدث C اللجنة تضم مهندساً واحداً على الأقل

خ خ ، $\underbrace{\text{خ م ، م م}}_{C}$

(٣) الأقل المطلوب وزيادة

$$P(C)=\frac{C(7,2)+C(7,1)\cdot C(5,1)}{C(12,2)}$$

$$P(C)=\frac{21+35}{66}=\frac{56}{66}$$

④ نفرض الحدث D أن تضم اللجنة مهندساً واحداً على الأكثر.

$\underbrace{\text{خ خ ، خ م}}_{D}$ ، م م

(٣) الأكثر المطلوب بالتفصيل

$$P(D)=\frac{C(7,1)\cdot C(5,1)+C(5,2)}{C(12,2)}$$

$$P(D)=\frac{35+10}{66}=\frac{45}{66}$$

⑩ لنلقِ ثلاث قطع من النقود ونلاحظ ظهور عدد الشعارات الصورة التي تظهر والمطلوب:

① اكتب فضاء التجربة لإلقاء ثلاثة قطع. (Ω).

② اكتب فضاء ظهور عدد الشعارات Q

٣) احسب $P(0)$ و $P(1)$ و $P(2)$ و $P(3)$

٤) احسب X الحدث الذي يوافق ظهور شعار واحد على الأقل.

٥) احسب Y الحدث الذي يوافق ظهور الشعارات الثلاثة أو ظهور الكتابات الثلاثة.

الحل: ①

$$\Omega=\{HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HTT\}$$

②

$$Q=\{0, 1, 2, 3\}$$

0 ← عدم ظهور أي شعار

1 ← ظهور شعار واحد فقط

2 ← ظهور شعارين

3 ← ظهور ثلاث شعارات

③

$$P(0)=\frac{1}{8} , P(1)=\frac{3}{8}$$

$$P(2)=\frac{3}{8} , P(3)=\frac{1}{8}$$

④

$$P(X)=P(1)+P(2)+P(3)=\frac{3+3+1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$P(Y)=P(0)+P(3)=\frac{1+1}{8}=\frac{2}{8}$$

Scanned by CamScanner

(١١) نلقي قطعة نقود مرتين والمطلوب:

١) اكتب Q فضاء العينة.

٢) اكتب الحدث A ان يظهر شعار فقط؟ وما احتماله؟

٣) اكتب الحدث B ان يظهر شعار واحد على الاقل؟ وما احتماله؟

٤) اكتب الحدث C ان يظهر شعار على الأكثر؟ وما احتماله؟

٥) اكتب الحدث D ان يظهر شعارات معاً؟ وما احتماله؟

الحل: ١) $Q=\{HH, HT, TH, TT\}$

٢) $A=\{TH, HT\}$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(Q)}=\frac{2}{4}$$

٣) $B=\{TH, HT, HH\}$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(Q)}=\frac{3}{4}$$

٤) $C=\{TT, TH, HT\} \Rightarrow P(C)=\frac{3}{4}$

٥) $D=\{HH\} \Rightarrow P(D)=\frac{n(D)}{n(Q)}=\frac{1}{4}$

(١٣) اذا كان فضاء العينة

$Q=\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$.

بين اي العلاقات التالية m_1 و m_2 , m_3 تمثل تابعاً احتمالياً:

$m_1: P(L_1)=P(L_2)=P(L_3)=P(L_4)=\frac{1}{3}$

$m_2: P(L_1)=P(L_2)=P(L_3)=\frac{1}{2}$

$P(L_4)=\frac{-1}{2}$

$m_3: P(L_1)=\frac{1}{2}$ و $P(L_2)=\frac{1}{4}$

$P(L_3)=P(L_4)=\frac{1}{8}$

الحل: ① m_1 يحقق الشرط الاول فكل حدث ينتمي الى $[0,1]$

الشرط الثاني غير محقق لان

$$P(L_1)+P(L_2)+P(L_3)+P(L_4)\neq 1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\neq 1$$

② m_2 لا يحقق الشرط الاول لان

$$P(L_4)=\frac{-1}{2}\notin[0,1]$$

③ m_3 يحقق الشرط لان كل حدث ينتمي الى $[0,1]$

ويحقق الشرط الثاني لان

$$P(L_1)+P(L_2+P(L_3)+P(L_4)=1$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1 \Rightarrow$ محقق

من تحقق الشرطين فان m_3 تابع احتمالي.

(١٢) ① اذا كان احتمال نجاح العملية $0,85$ فما احتمال فشلها؟

الحل: A الحدث نجاح العملية

A' الحدث المتمم فشل العملية فان

$$P(A')=1-P(A)=1-0,85$$

$$P(A')=0,15$$

② سئل مرشح عن احتمال فوزه فقال $\frac{3}{4}$ وعن احتمال فشله قال $\frac{1}{3}$ فهل صحيح كلامه؟

الحل: A حدث نجاحه و A' فشله

$$P(A)+P(A')=\underset{3}{\frac{3}{4}}+\underset{4}{\frac{1}{3}}=\frac{9+4}{12}=\frac{13}{12}\neq 1$$

أحد قوسي المرشح ع الاقل غير صحيح

---

⑭ يوجد في صندوق 12 مصباحاً منها 4 غير صالحة ونريد سحب مصباحين عشوائياً بفرض الحدث X : سحب مصباحين غير صالحين الحدث Y : سحب مصباحين صالحين

١) اوجد $P(X)$

٢) اوجد $P(Y)$

٣) اوجد $P(Z)$ حيث الحدث Z كون أحدهما ع الاقل غير صالح

الحل في الكتاب صفحة ١٦٣ و ١٦٤

---

⑮ تتألف الهيئة الفنية لأحد المعامل من 24 شخصاً : (16 مهندساً و 8 خبراء) فإذا علمنا ان مدير المعمل يريد تشكيل لجنة من ثلاثة اشخاص من تلك الهيئة فما احتمال :

١) ان تتكون اللجنة من 3 مهندسين.

٢) ان تضم اللجنة مهندسين فقط.

٣) ان تضم اللجنة خبيرين فقط.

٤) ان تضم اللجنة مهندسين اثنين ع الاكثر .

الحل في الكتاب صفحة ١٦٥

---

⑯ سئل لاعب عن احتمال فوزه فقال : $\frac{3}{5}$ وعن احتمال فشله قال : $\frac{2}{3}$

الحل: A الحدث الفوز

A' الحدث الفشل

$$P(A)+P(A')=\underset{3}{\frac{3}{5}}+\underset{5}{\frac{2}{3}}$$

$$P(A)+P(A')=\frac{9+10}{15}=\frac{19}{15}\neq 1$$

احد القوسين ع الاقل غير صحيح

---

⑰ إذا كان فضاء العينة $\Omega=\{L_1, L_2, L_3\}$ بيِّن اي العلاقات التالية تمثل تابعاً احتمالياً m_1 و m_2 و m_3 حيث :

$$m_1 : P(L_1)=P(L_2)=P(L_3)=\frac{1}{2}$$

$$m_2 : P(L_1)=P(L_2)=\frac{1}{2}$$

$$P(L_3)=\frac{-1}{2}$$

$$m_3 : P(L_1)=\frac{1}{2},\ P(L_2)=\frac{1}{3}$$

$$P(L_3)=\frac{1}{6}$$

الحل: ١) m_1 تحقق الشرط الاول لان قيمة كل حدث فيه تنتمي الى $[0,1]$ لا تحقق الشرط الثاني لان :

$$P(L_1)+P(L_2)+P(L_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\neq 1$$

٢) m_2 لا تحقق الشرط الاول لان

$$P(L_3)=-\frac{1}{2}\notin[0,1]$$

٣) m_3 تحقق الشرط الاول لأن كل حدث فيه من $[0,1]$ وتحقق الشرط الثاني :

$$P(L_1)+P(L_2)+P(L_3)=\underset{3}{\frac{1}{2}}+\underset{2}{\frac{1}{3}}+\underset{1}{\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{3+2+1}{6}=\frac{6}{6}=1 \Rightarrow$$ تحقق

مجموعة الاعداد العقدية رمزها (c) ℂ ⟵

هام $i^2 = -1$

الشكل الديكارتي : $Z = x + i \cdot y$

مرافقه : $\bar{Z} = x - i y$

طويلة العدد العقدي $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

معاكس : $Z_1 = -x - i y$

قاعدة : $i^N = i^{\text{((باقي قسمة N على ٤))}}$

العمليات الحسابية على الاعداد العقدية من جمع وطرح وضرب وقوة كما في الرموز الجبرية لكن ننتبه ان $i^2 = -1$.

قسمة عدد عقدي على عدد عقدي يتم ايجاد الناتج بان نضرب البسط والمقام بمرافق المقام .

هام العدد العقدي : $Z = a + b i$

له جذران تربيعيان متعاكسان هما :

$Z_1 = x_1 + y_1 i$ و $Z_2 = -x_2 - y_2 i$

حيث : $Z = (Z_1)^2$ أو $Z = (Z_2)^2$

التحويل من الشكل الديكارتي $Z = x + i y$ الى الشكل المثلثي :

الطويلة $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} \end{aligned}\right) \Rightarrow \theta = ?$$

او نرسم النقطة بشكل دقيق نجد θ زاوية xx' مع Z

الزوايا الشهيرة في الربع الاول هي :

0° او 30° أو 45° أو 60° أو 90° أو حسب الربع .

نميز ثلاث حالات :

محورية اما 0 او 90° أو 180° أو 270°

مربع هي 45° أو حسب الربع

مستطيل هي 30° او 60° أو حسب الربع

الشكل المثلثي المختصر : $Z = [r , \theta]$

الشكل المثلثي الطويل :

$Z = r[\cos\theta + i \sin\theta]$

العمليات على الشكل المثلثي :

① الضرب : نضرب الطويلتين ونجمع الزاويتين

$$[r_1 , \theta_1] \cdot [r_2 , \theta_2] = [r_1 \cdot r_2 , \theta_1 + \theta_2]$$

② القسمة : نقسم الطويلتين ونطرح الزاويتين

$$[r_1 , \theta_1] \div [r_2 , \theta_2] = \left[\frac{r_1}{r_2} , \theta_1 - \theta_2\right]$$

٣) القوة : الطويلة قوة والزاوية ضرب بالاس

$$[r , \theta]^N = [r^N , N \cdot \theta]$$

٤) الجذر النوني : الطويلة جذر نوني والزاوية نقسم على N مضافاً اليها $2\pi K$

$$Z = [r , \theta]$$

$$\sqrt[N]{Z} = \left[\sqrt[N]{r} , \frac{\theta + 2\pi K}{N}\right]$$

التحويل من المثلثي : $Z = [r , \theta]$ الى الشكل الديكارتي :

نكتب بالشكل الطويل ونوجد قيمة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ ونجد الشكل .

الطالب الذي لا يحفظ الزوايا الشهيرة يقوم بما يلي :

• نرسم شعاع طول 1 cm يصنع مع X باتجاه المعلوم θ ثم نسقط الشعاع على $\left\{\begin{aligned} &xx' \text{ هو } \cos\theta \\ &yy' \text{ هو } \sin\theta \end{aligned}\right.$

نميز ثلاث حالات

١) مستطيل معه ا العرض $\frac{1}{2}$ والطول $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وكذلك حسب اي ربع

② مربع بعداهما : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وحسب الربع

٣) محورية هما (١) أو (٠) وحسب الربع

① أوجد ناتج ما يلي :

i^{46} و i^{7} و i^{21} و i^{100} :

الحل :

$i^{100} = i^{0} = 1$

$i^{21} = i^{1} = i$

$i^{7} = i^{3} = i^{2} \cdot i = -1i = -i$

$i^{46} = i^{2} = -1$

② لدينا $Z_1 = 4 + 3i$

$Z_2 = 1 - 2i$

والمطلوب أوجد كلاً مما يلي :

① $Z_1 + Z_2$ ② $2Z_1 - 3Z_2$ ٣) $Z_1 \cdot Z_2$

٤) Z_1^2 ٥) Z_2^2 ٦) $\overline{Z_1}$ ثم $\overline{Z_2}$

٧) $|Z_1|$ ثم $|Z_2|$

٨) اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الديكارتي

الحل : ①

$Z_1 + Z_2 = 4 + 3i + 1 - 2i = 5 + i$

②

$2Z_1 - 3Z_2 = 2(4 + 3i) - 3(1 - 2i)$

$= 8 + 6i - 3 + 6i$

$2Z_1 - 3Z_2 = 5 + 12i$

٣)

$Z_1 \cdot Z_2 = (4 + 3i)(1 - 2i)$

$Z_1 \cdot Z_2 = 4 - 8i + 3i \underbrace{- 6i^2}_{+6}$

$Z_1 \cdot Z_2 = 10 - 5i$

٤)

$Z_1^2 = (4 + 3i)^2$

$2(4)(3i)$

$= 16 + 24i \underbrace{+ 9i^2}_{-9}$

$Z_1^2 = 7 + 24i$

⑤

$Z_2^2 = (1 - 2i)^2$

$2(1)(2i)$

$Z_2^2 = 1 - 4i \underbrace{+ 4i^2}_{-4}$

$Z_2^2 = -3 - 4i$

⑥

$\overline{Z}_1 = 4 - 3i$

$\overline{Z}_2 = 1 + 2i$

٧)

$Z_1 = 4 + 3i$

$x = 4$ $y = 3$

$r_1 = |Z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$Z_2 = 1 - 2i$

$x_2 = 1$ $y_2 = -2$

$r_2 = |Z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

٨)

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4 + 3i}{1 - 2i}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(4 + 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4 + 8i + 3i \overbrace{+ 6i^2}^{-6}}{1 + 2i - 2i \underbrace{- 4i^2}_{+4}}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{-2 + 11i}{5} = \frac{-2}{5} + \frac{11}{5} i$$

تمرين : اكتب $Z = \frac{2 + 3i}{1 + 2i}$ بالشكل الديكارتي .

الحل : نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$Z = \frac{(2 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}$$

$$Z = \frac{2 - 4i + 3i \overbrace{- 6i^2}^{+6}}{1 \text{[illegible]} 2i + 2i \underbrace{- 4i^2}_{+4}}$$

$$Z = \frac{8 - i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5} i$$

② لدينا العدد العقدي:

$$Z=\frac{4}{1+i}$$

١) اكتب Z بالشكل الديكارتي.

٢) اوجد طويلة العدد $Z=2-2i$

٣) اثبت ان $Z^2=-8i$

الحل: ١) نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$Z=\frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4-4i}{1-i+i\underbrace{-i^2}_{+1}}$$

$$Z=\frac{4-4i}{2}=\frac{4}{2}-\frac{4}{2}i=2-2i$$

٢)

$$Z=2-2i$$

$$x=2 \quad , y=-2$$

$$r=|Z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+4}$$

$$r=|Z|=\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$$

٣)

$$Z^2=(2-2i)^2 \quad 2(2)(2i)$$

$$Z^2=4-8i\underbrace{+4i^2}_{-4}$$

$Z^2=-8i \Rightarrow$ «محققة»

④ لدينا العدد العقدي $Z=\frac{1+3i}{3+i}$

١) اكتب Z بالشكل الديكارتي.

٢) اكتب Z بالشكل المثلثي.

الحل: ① نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$Z=\frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$Z=\frac{6-2i+12i\overbrace{-4i^2}^{+4}}{9-3i+3i\underbrace{-i^2}_{+1}}$$

$$Z=\frac{10+10i}{10}=\frac{10}{10}+\frac{10}{10}i$$

$$Z=1+i$$

٢) $y=1$ و $x=1$ «ربع اول»

$$r=|Z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt2}\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \theta=45^\circ$$

$$r=[\sqrt{2}, 45^\circ]$$

او $r=\sqrt{2}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)$

⑤ حل المعادلة: $Z^2+2Z+2=0$ في مجموعة الأعداد العقدية (C).

الحل: $c=2$ $\quad b=2$ $\quad a=1$

$$\Delta=b^2-4a\cdot c$$

$$\Delta=(2)^2-4(1)(2)=4-8=-4$$

$$\Delta=4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2i$$

إما: $Z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+2i}{2(1)}$

$$Z_1=\frac{-2}{2}+\frac{2}{2}i \Rightarrow Z_1=-1+i$$

$$Z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-2i}{2(1)}$$

$$Z_2=\frac{-2}{2}-\frac{2}{2}i \Rightarrow Z_2=-1-1i$$

حل المعادلة $4Z^2+9=0$ في (C)

الحل: $4Z^2=-9 \Rightarrow Z^2=\frac{-9}{4}=\frac{9}{4}i^2$

إما $Z=\frac{3}{2}i$

أو $Z=-\frac{3}{2}i$

⑥ دورة ٢٠٠٨ (٥١ درجة)

اكتب العدد العقدي: $z=(2-3i)(3+2i)$ بالشكل الديكارتي ثم أوجد $\bar{z}$ و $|z|$

الحل:

$$z=6+4i-9i\underbrace{-6i^2}_{+6}$$

$$z=12-5i$$

$$\bar{z}=12+5i$$

$$z=12-5i$$

$x=12$ $y=-5$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{144+25}$$

$$r=|z|=\sqrt{169}=13$$

⑦ دورة ٢٠٠٦ ٤٠ درجة

ليكن العدد العقدي $z=1+i\sqrt{3}$ اكتبه بالشكل المثلثي.

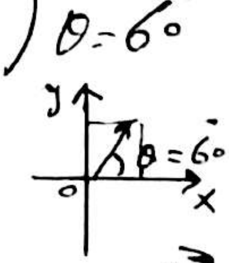
الحل: $(x=1 \ , \ y=\sqrt{3})$

ربع أول

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right)\Rightarrow$$

ربع أول $\theta=60^\circ$



$$z=[2, 60^\circ]$$

$$z=2[\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ]$$

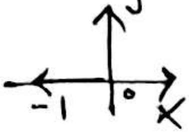
⑧ دورة ٢٠٠٩ ٦٠ درجة

اكتب العدد العقدي $z=1+\sqrt{3}\,i$ بالشكل المثلثي ثم برهن أن $z^3=-8$

الحل: الطلب كما في الدورة السابقة نجد:

$$z=[2, 60^\circ]$$

$$z^3=[2, 60^\circ]^3$$



$$z^3=[8, 180^\circ]$$

$$z^3=8(\cos 180^\circ+i\,180^\circ)$$

$$z^3=8(-1+i(0))$$

$$z^3=-8$$

"محقق"

⑨ دورة ٢٠١٠ (٤٠ درجة)

اكتب العدد العقدي: $z=-2+2\sqrt{3}\,i$ بالشكل المثلثي.

الحل: $(x=-2 \ , \ y=2\sqrt{3})$

[illegible]

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+12}$$

$$r=\sqrt{16}=4$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right)\Rightarrow$$

ربع ثاني

$$\theta=120^\circ$$

$$z=[4, 120^\circ]$$

$$z=4[\cos 120+i\sin 120^\circ]$$

⑩ دورة ٢٠١١

$Z=2+2\sqrt{3}\,i$ اكتبه بالشكل المثلثي ثم أوجد Z^2

الحل:

$Z=2+2\sqrt{3}\,i$

ربع اول $(x=2\ ,\ y=2\sqrt{3})$

$r=|Z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}$

$r=|Z|=4$

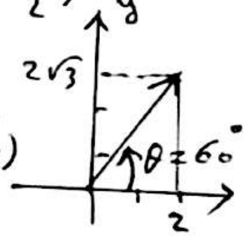
$\cos\theta=\frac{}{r}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ربع اول → $\theta=60$

$Z=[4,60^\circ]$

$Z=4(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$

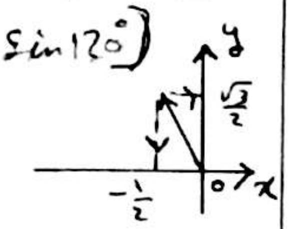


$Z^2=[4,60^\circ]^2=[16,120^\circ]$

$Z^2=16[\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ]$

$Z^2=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$Z^2=-8+8\sqrt{3}\,i$



⑪ دورة ٢٠١١

اكتب العدد العقدي $Z=\frac{\sqrt{3}+i}{2+2\sqrt{3}\,i}$ بالشكل الديكارتي

$Z=x+yi$

الحل: نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$Z=\frac{(\sqrt{3}+i)(2-2\sqrt{3}i)}{(2+2\sqrt{3}\,i)(2-2\sqrt{3}\,i)}$

$Z=\frac{2\sqrt{3}-6i+2i-\overbrace{2\sqrt{3}\,i^2}^{2\sqrt{3}}}{4-4\sqrt{3}\,i+4\sqrt{3}\,i\underbrace{-12i^2}_{+12}}$

$Z=\frac{4\sqrt{3}-4i}{16}$

$Z=\frac{4\sqrt{3}}{16}-\frac{4}{16}i$

$Z=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$

⑫ دورة ٢٠١٦ ٤٠ درجة

لدينا $Z_1=1+i$ و $Z_2=3i$ والمطلوب:

اوجد ناتج $Z_1\cdot Z_2$ ثم Z_1^2

الحل:

$Z_1\cdot Z_2=(1+i)(3i)$

$Z_1\cdot Z_2=3i+\underbrace{3i^2}_{-3}=-3+3i$

$Z_1^2=(1+i)^2$ $2(1)(i)$

$Z_1^2=1+2i\underbrace{+i^2}_{-1}$

$Z_1^2=2i$

⑬ دورة ٢٠١٨

لدينا العدد العقدي $Z=\frac{4-2i}{1+i}$

والمطلوب: اكتب Z بالشكل الديكارتي $Z=x+iy$ ثم اوجد $\overline{Z}$ ثم اوجد $|\overline{Z}|$

الحل: نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$Z=\frac{(4-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$ -2

$Z=\frac{4-4i-2i+2i^2}{1-i+i\underbrace{-i^2}_{+1}}$

$Z=\frac{2-6i}{2}=\frac{2}{2}-\frac{6}{2}i=1-3i$

$Z=1-3i$

$\boxed{\overline{Z}=1+3i}$

$Z=1-3i\ ,\ (x=1\ ,\ y=-3)$ ٢/١ ٢/١

$r=|Z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$\boxed{|Z|=\sqrt{10}}$ ١ د

⑭ دورة ٢٠١٨

اثبت صحة العلاقة في مجموعة الاعداد العقدية (C):

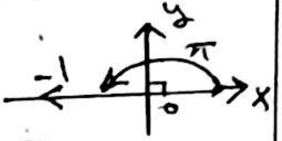
$$Z=\left[2\sqrt{2},\frac{7\pi}{6}\right]\div\left[2,\frac{\pi}{6}\right]=-\sqrt{2}$$

الحل:

$$Z=\left[2\sqrt{2},\frac{7\pi}{6}\right]\div\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$$

$$Z=\left[\frac{2\sqrt{2}}{2},\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right]=\left[\sqrt{2},\frac{6\pi}{6}\right]$$

$$Z=\left[\sqrt{2},\pi\right]$$



$$Z=\sqrt{2}\left[\cos\pi+i\sin\pi\right]$$

$$Z=\sqrt{2}\left(-1+i(0)\right)=-\sqrt{2}$$

⑮ ليكن العدد العقدي $Z=3+\sqrt{3}\,i$

اثبت ان:

$$Z\cdot\overline{Z}=12$$

الحل:

$$Z\cdot\overline{Z}=(3+\sqrt{3}\,i)(3-\sqrt{3}\,i)$$

$$Z\cdot\overline{Z}=9-3\sqrt{3}\,i+3\sqrt{3}\,i\underbrace{-3i^2}_{+3}$$

$$Z\cdot\overline{Z}=12$$

⑯ ليكن العدد العقدي $Z=[2,120^\circ]$

اكتبه بالشكل $Z=x+iy$

ثم اوجد $\overline{Z}$

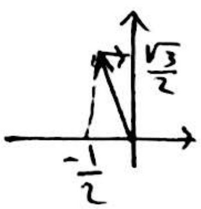
الحل:

$$Z=[2,120^\circ]$$

$$Z=2\left(\cos120^\circ+i\sin120^\circ\right)$$

$$Z=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Z=-1+\sqrt{3}\,i$$



$$\overline{Z}=-1-\sqrt{3}\,i$$

⑰ في مجموعة الاعداد العقدية (C)

اثبت ان:

$$[2,30^\circ]^4\cdot[3,80^\circ]^3=432$$

الحل:

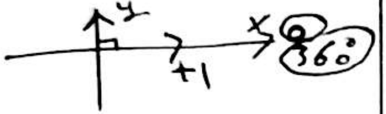
$$[2,30^\circ]^4\cdot[3,80^\circ]^3=[16,120^\circ][27,240^\circ]$$

$$=[16\times27,120^\circ+240^\circ]$$

$$=[432,360^\circ]$$

$$=432\left(\cos360^\circ+i\sin360^\circ\right)$$

$$=432(1+0i)=432$$



⑱ لدينا العدد العقدي $Z=\frac{1+i}{1-i}$

١) اكتبه بالشكل الديكارتي

٢) ثم اكتبه بالشكل المثلثي

٣) ثم اوجد Z^6

الحل: ١) نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

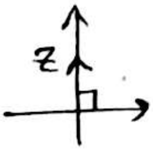
$$Z=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$Z=\frac{1+i+i+\overbrace{i^2}^{=-1}}{1+i-i\underbrace{-i^2}_{+1}}$$

$$Z=\frac{2i}{2}=i$$

٢) $Z=i$

$x=0\ ,\ y=1$



$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+1}=1$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{1}{1}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=90^\circ$$

$Z=[1,90^\circ]$ او: $Z=1(\cos90^\circ+i\sin90^\circ)$

③

$$Z^6=i^6=i^2=-1$$

⑲ اوجد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي : $Z=5-12i$

الحل: نفرض $Z_1=x+iy$ جذره التربيعي

$$Z_1^2=Z \Rightarrow (x+iy)^2=5-12y$$

$$x^2+2iy+i^2y^2=5-12y$$

$$\underbrace{x^2-y^2}+2yxi=5-12i$$

بالمطابقة نجد :

$x^2-y^2=5$ .... ①

$$2xy=-12 \Rightarrow y=\frac{-12}{2x}$$

$y=\frac{-6}{x}$ ... ②

نعوض في ①) نجد

$$\underset{x^2}{\frac{x^2}{1}}-\underset{1}{\frac{36}{x^2}}=\underset{x^2}{\frac{5}{1}}$$

نضرب بـ x^2 :

$$x^4-5x^2-36=0$$

+4 -9

$(x^2-9)(x^2+4)=0$ مستحيل، لذلك : $x^2+4=0$

$\boxed{إما}$ $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9$

إما $x=+3 \Rightarrow y=\frac{-12}{2(3)}=-2$

إذن

$Z_1=3-2i$ جذر أول

أو : $x=-3 \Rightarrow y=\frac{-12}{-6}=+2$

الجذر الثاني $Z_2=-3+2i$

⑳ اوجد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي

$$Z=3+4i$$

الحل: نفرض $Z_1=x+iy$ جذره التربيعي

$$(Z_1)^2=Z$$

$$(x+yi)^2=3+4i$$

$$x^2+2xyi+y^2i^2=3+4i$$

$$\underbrace{x^2-y^2}+\underbrace{2xy}=3+4i$$

بالمطابقة نجد :

$x^2-y^2=3$ ... ①

$2xy=4 \Rightarrow y=\frac{4}{2x} \Rightarrow y=\frac{2}{x}$ ... ②

نعوض في ① نجد :

$$\underset{x^2}{\frac{x^2}{1}}-\underset{1}{\frac{4}{x^4}}=\underset{x^2}{\frac{3}{1}}$$

$\alpha+1$ -4

$\alpha+2$ -2

$$x^4-3x^2-4=0$$

$$(x^2+1)(x^2-4)=0$$

$x^2+1=0$ مستحيل لذلك إما

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$$

إما $x=+2 \Rightarrow y=\frac{2}{2}=1$

الجذر الأول : $Z_1=2+i$

أو $x=-2 \Rightarrow y=\frac{-2}{2}=-1$

الجذر الثاني : $Z_2=-2-i$

㉑ لدينا $Z=-3+4i$

و $Z_1=1+2i$ والمطلوب:

١) [illegible] إن $\boxed{Z_1^2=Z}$ ماذا نستنتج

٢) استنتج الجذر الثاني لـ Z

الحل: ١)

$$Z_1^2=(1+2i)^2 \quad 2(1)(2i)$$

$$Z_1^2=1+4i+\underbrace{4i^2}_{-4}$$

$$Z_1^2=-3+4i \Rightarrow Z_1^2=Z$$

وإذن $Z_1=1+2i$ جذر أول لـ Z

٢) الجذر الثاني معاكس $Z_2=-1-2i$

٢٢) دورة ٢٠١٥ ٤٠ درجة

لدينا العدد العقدي $Z = \frac{10}{2+i}$

والمطلوب: اكتبه بالشكل الديكارتي

$Z = x + iy$

الحل: نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$Z = \frac{10(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{20-10i}{4-2i+2i-\underbrace{i^2}_{+1}}$$

$$Z = \frac{20-10i}{5} = \frac{20}{5} - \frac{10}{5}i$$

$$Z = 4 - 2i$$

---

٢٣) لدينا $Z = [2, 30^\circ]$

١) اكتبه بالشكل الديكارتي $Z = x + iy$

٢) اثبت أن $Z^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

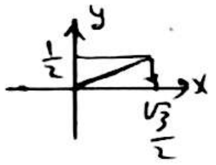
٣) برهن أن $Z^3 = 8i$

٤) برهن أن $Z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$

الحل: ١)

$$Z = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$$

$$Z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$



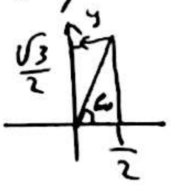
$$Z = \sqrt{3} + i$$

٢)

$$Z^2 = [2, 30^\circ]^2 = [4, 60^\circ]$$

$$Z^2 = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$

$$Z^2 = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$



$$Z^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$$

٣)

$$Z^3 = [2, 30^\circ]^3$$

$$Z^3 = [8, 90^\circ]$$

$$Z^3 = 8(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$

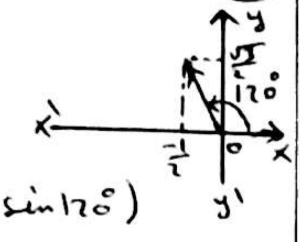
$$Z^3 = 8(0 + 1i)$$

$$Z^3 = 8i$$

٤)

$$Z^4 = [2, 30^\circ]^4$$

$$Z^4 = [2^4, 4 \times 30^\circ]$$



$$Z^4 = 16(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$

$$Z^4 = 16\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -8 + 8\sqrt{3}\,i$$

---

٢٤) لدينا: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

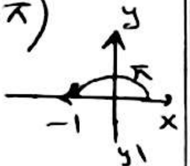
$$z_2 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

برهن أن: $z_1 \cdot z_2 = -6$

الحل: نضرب الطويلتين ونجمع الزاويتين:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 \times 3)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6(\cos\pi + i\sin\pi)$$



$$z_1 \cdot z_2 = 6(-1 + i(0))$$

$$z_1 \cdot z_2 = -6$$

---

٢٥) برهن أن: $\left[2, \frac{\pi}{12}\right] \cdot \left[5, \frac{5\pi}{12}\right] = 10i$

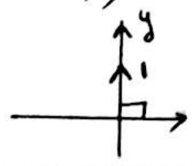
الحل: نضرب الطويلتين ونجمع الزاويتين

$$\left[2, \frac{\pi}{12}\right] \cdot \left[5, \frac{5\pi}{12}\right] = \left[2 \times 5, \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}\right]$$

$$\left[2, \frac{\pi}{12}\right] \cdot \left[5, \frac{5\pi}{12}\right] = \left[10, \frac{6\pi}{12}\right] = \left[10, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left[2, \frac{\pi}{12}\right] \cdot \left[5, \frac{5\pi}{12}\right] = 10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 10(0 + i(1))$$

$$\left[2, \frac{\pi}{12}\right] \cdot \left[5, \frac{5\pi}{12}\right] = 10i$$



٢٦) لدينا: $Z_1 = 4\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right]$

$Z_2 = 2\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right]$

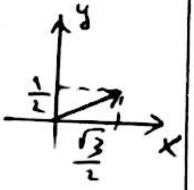
المطلوب أوجد $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الديكارتي.

الحل: نقسم الطويلتين ونطرح الزاويتين

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4}{2}\left[\cos\left(\underset{3}{\frac{3\pi}{2}} - \underset{2}{\frac{4\pi}{3}}\right) + i\sin\left(\underset{3}{\frac{3\pi}{2}} - \underset{2}{\frac{4\pi}{3}}\right)\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 2\left[\cos\left(\frac{9\pi}{6} - \frac{8\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6} - \frac{8\pi}{6}\right)\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



$$\frac{Z_1}{Z_2} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{3} + i$$

٢٧) لدينا: $Z_1 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$Z_2 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$

برهن ان: $\frac{Z_1}{Z_2} = 4i$

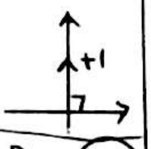
الحل: نقسم الطويلتين ونطرح الزاويتين.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{8}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)\right]$$

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(0 + i(1)\right) = 4i$$



٢٨) برهن صحة:

$$\left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{6}\right] \div \left[2, \frac{\pi}{6}\right] = -\sqrt{2}$$

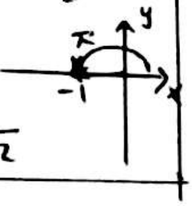
الحل: نقسم الطويلتين ونطرح الزاويتين:

الطرف الاول $= \left[\frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right] = \left[\sqrt{2}, \frac{6\pi}{6}\right]$

الطرف الاول $= \left[\sqrt{2}, \pi\right]$

$= \sqrt{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$

$= \sqrt{2}\left(-1 + i(0)\right) = -\sqrt{2}$



٢٩) $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

١) كتب Z بالشكل المثلثي

٢) برهن ان $Z^{12} = 1$

الحل: ١) $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\left(x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ بر١ اول

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

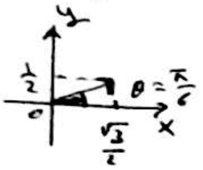
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

θ بر١ اول

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$Z = \left[1, \frac{\pi}{6}\right]$

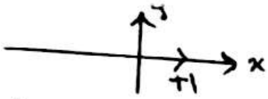
(٢)



$$Z^{12} = \left[1, \frac{\pi}{6}\right]^{12}$$

$$Z^{12} = \left[1^{12}, 12\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \left[1, 2\pi\right]$$

$$Z^{12} = \left[1, 0\right]$$



$$Z^{12} = 1\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$$

$$Z^{12} = 1\left(1 + i(0)\right) = 1$$

٣٠) لدينا $Z = 8i$

١) اكتبه بالشكل المثلثي.

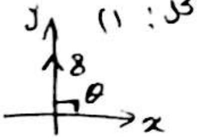
٢) اوجد الجذور التكعيبية للعدد Z بالشكل المثلثي.

الحل: ١) $Z = 8i$

$(x = 0, \quad y = 8)$

$r = 8$ نما الطويلة

$\theta = \frac{\pi}{2}$ والزاوية



$$Z = \left[8, \frac{\pi}{2}\right]$$

٢) نفرض $Z' = [r', \theta']$ جذر تكعيبي لـ Z

$$Z'^3 = Z \Rightarrow [r'^3, 3\theta'] = \left[8, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$r'^3 = 8 \Rightarrow r' = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$3\theta' = \frac{\pi}{2} + 2\pi K \Rightarrow \theta' = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi K}{3}$$

$$K = 0 \Rightarrow r' = 2 ; \theta' = \frac{\pi}{6} \Rightarrow Z'_1 = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$$

$K=1 \Rightarrow r=2$ ، $\theta_2 = \underset{1}{\frac{\pi}{6}} + \underset{2}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

إذاً $Z'_2 = [2, \frac{5\pi}{6}]$

بنفس الطريقة نجد: $K=2 \Rightarrow r=2$ ، $\theta_3 = \frac{9\pi}{6}$

إذاً $Z'_3 = [2, \frac{9\pi}{6}]$

---

(٢١) لدينا $Z = 2+2\sqrt{3}\,i$ والمطلوب:

١) اكتب Z بالشكل المثلثي.

٢) اوجد الجذرين التربيعيين بالشكل المثلثي ثم بالشكل الجبري (الديكارتي).

الحل: ١) $Z = 2+2\sqrt{3}\,i$

ربع أول $\Leftarrow (x=2 , y=2\sqrt{3})$

$r = |Z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ θ ربع أول، $\theta = 60^\circ$

$Z = [4, 60^\circ]$

٢) نفرض $Z' = [r', \theta']$ جذراً تربيعياً لـ Z فيكون:

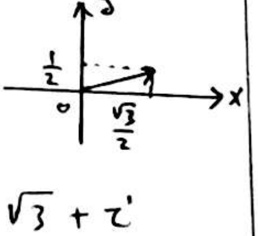
$Z'^2 = Z \Rightarrow [r'^2, 2\theta'] = [4, 60^\circ]$

$r'^2 = 4 \Rightarrow r' = 2 , 2\theta' = 60^\circ + 360^\circ K$

$\theta' = \frac{60^\circ}{2} + \frac{360^\circ}{2}K \Rightarrow \theta' = 30^\circ + 180^\circ K$

$K=0 \Rightarrow r'=2 , \theta' = 30^\circ$

$Z'_1 = [2, 30^\circ]$



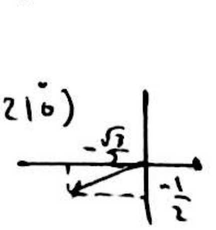
$Z'_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$

$Z'_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} + i$

$K=1 \Rightarrow r'=2 , \theta' = 30+180^\circ = 210^\circ$

$Z'_2 = [2, 210^\circ]$

$Z'_2 = 2(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)$



$Z'_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$

$Z'_2 = -\sqrt{3} - i$

---

(٢٢) تمارين محلولة بالكتاب

① حل المعادلة $Z^2-2Z+5=0$ في مجموعة الأعداد العقدية.

الحل بالكتاب صفحة ١٦٩

② نفرض: $z_1=2+i$ ، $z_2=-3+2i$ ، $z_3=3i$

أوجد $z_1+z_2+\bar{z}_3$ و z_1-z_2 ، z_2+z_3

$z_1 \cdot z_2$ ، z_2^2 ، $(z_3)^3$ ، $|z_1|$

$\frac{z_1}{z_2}$

الحل بالكتاب صفحة ١٧٣ + ١٧٤

٣) اكتب $Z = \frac{\sqrt{3}+i}{2-2\sqrt{3}\,i}$ بالشكل الجبري (الديكارتي).

الحل بالكتاب صفحة ١٧٤

٤) اكتب $Z = \frac{1}{2-i}$ بالشكل الديكارتي

الحل: بالكتاب صفحة ١٧٥

٥) لدينا: $Z = \frac{1+i}{1-i}$

اكتبه بالشكل الديكارتي ثم برهن أن: $Z^6 = -1$

الحل بالكتاب صفحة ١٧٥

٦) اكتب $Z = 1+\sqrt{3}\,i$ بالشكل المثلثي

الحل بالكتاب صفحة ١٨٠

٧) اكتب العدد العقدي $Z = -2+2\sqrt{3}\,i$ بالشكل المثلثي.

الحل: بالكتاب صفحة ١٨٠ + ١٨١

٨) اكتب $Z = -\sqrt{3}-i$ بالشكل المثلثي

الحل: بالكتاب صفحة ١٨١

٩) برهن صحة:

$[\sqrt{2}, 120^\circ]^2 \cdot [1, 30^\circ]^4 = 2$

الحل: بالكتاب صفحة ١٨٩

المصفوفات

درجة المصفوفة $A_{m\times n}$ هي (m , n)

m عدد الأسطر و n عدد الأعمدة

$A_{2\times3}$ من الدرجة (2,3)

وَ $[2\ \ 1\ \ -1]$ من الدرجة (1,3)

انواع المصفوفات :

① المصفوفة السطرية : $1\times n$

② المصفوفة العمودية : $m\times 1$

٣) المصفوفة : جميع عناصرها اصفار.

$$O_{m\times n}$$

٤) المصفوفة الواحدة: مربعة جميع عناصرها اصفار ما عدا القطر الرئيسي كلا منه واحد.

٥) المصفوفة القطرية العددية : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار ما عدا القطر الرئيسي لها نفس الرقم.

٦) المصفوفة القطرية : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار ما عدا القطر الرئيسي اعداد مختلفة.

٧) المصفوفة المثلثية : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي او تحته تساوي اصفار

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

٨) المصفوفة المتناظرة مثل $\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$

٩) المصفوفة المتناظرة تخالفياً $\begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 \\ 2 & 5 & -7 \\ -1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

١٠) المربعة : عدد أسطرها = عدد أعمدتها مثل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ أو } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

①

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

المطلوب: ① اوجد منقول A ثم منقول B

٢) اوجد A+B ٣) اوجد 2A−3B

٤) اوجد −3A+2B

الحل: ١) منقول A :

$$A^t=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

منقول B :

$$B^t=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

٢)

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 & -3-4 \\ 3-2 & 0+3 & -1+0 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

٣)

$$2A-3B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -3 & 12 \\ 6 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A-3B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 12 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

٤)

$$-3A+2B=\begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-3A+2B=\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -13 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

---

② لدينا

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} ; B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

اوجد ١) A+B ٢) 3A−2B

الحل : ١)

$$A+B=\begin{bmatrix} 1\bullet1 & -1+3 \\ 2+0 & 0-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

②

$$3A-2B=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3A-2B=\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

(٤) لدينا : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

المطلوب : ١) اوجد $A \cdot B$ ٢) $B \cdot A$

الحل : ١)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1(1)-1(2) & 1(-1)-1(0) & 1(2)-1(-1) \\ 2(1)+1(2) & 2(-1)+1(0) & 2(2)+1(-1) \\ 0(1)-2(2) & 0(-1)-2(0) & 0(2)-2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(٢)

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1(1)-1(2)+2(0) & 1(-1)-1(+1)+2(-2) \\ 2(1)+0(2)-1(0) & 2(-1)+0(+1)-1(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

---

(٥) لدينا : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

المطلوب ١) اوجد $5A-2B$ ٢) اوجد $A \cdot B$ ٣) اوجد $B \cdot A$

الحل : (١)

$$5A-2B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 5 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ +2 & -2 & 0 \\ -2 & +2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 7 & -7 & 5 \\ -2 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

(٢)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1(2)+0(-1)+2(1) & 1(0)+0(1)+2(-1) & 1(2)+0(0)+2(1) \\ 1(2)-1(-1)+1(1) & 1(0)-1(1)+1(-1) & 1(2)-1(0)+1(1) \\ 0(2)+2(-1)-1(1) & 0(0)+2(1)-1(-1) & 0(2)+2(0)-1(1) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2+2 & -2 & 2+2 \\ 2+1+1 & -1-1 & 2+1 \\ -2-1 & 2+1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

٣)

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2(1)+0(1)+2(0) & 2(0)+0(-1)+2(2) & 2(2)+0(1)+2(-1) \\ -1(1)+1(1)+0(0) & -1(0)+1(-1)+0(2) & -1(2)+1(1)+1(-1) \\ 1(1)-1(1)+1(0) & 1(0)-1(-1)+1(2) & 1(2)-1(1)-1(-1) \end{bmatrix}$$

$$B-A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4-2 \\ -1+1 & -1 & -2+1-1 \\ 1-1 & +1+2 & 2-1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

" ضرب مصفوفتين عملية ليست تبديلية !! "

---

(٦) دورة ٢٠٠٨ | لتكن المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

و $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ والمطلوب : ١) اوجد $A \cdot B$ ٢) اوجد $B+C$ ماذا تسمي المصفوفة الناتجة ،

الحل :

(١)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2(2)+3(1)+1(0) & 2(1)+3(3)+1(2) & 2(-1)+3(-2)+1(1) \\ -1(2)+0(1)+1(0) & -1(1)+0(3)+1(2) & -1(-1)+0(-2)+1(1) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4+3 & 2+9+2 & -2-6+1 \\ -2 & -1+2 & +1+1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 13 & -7 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

٢) جمع مصفوفتين ان يكون لهما نفس الدرجة

$$B+C=\begin{bmatrix}2-1 & 1-1 & -1+1\\ 1-1 & 3-2 & -2+2\\ 0+0 & 2-2 & 1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

المصفوفة الناتجة تسمى المصفوفة الواحدية

---

(٧) دورة ٢٠١١ الأولى | لدينا المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&3&1\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&-1&1\\3&0&0\end{bmatrix}$$

أوجد منقول المصفوفة A ثم أوجد $A\cdot B$

الحل: منقول المصفوفة A هو A^t نحصل عليها بإبدال الأعمدة بالأسطر أو الأسطر بالأعمدة:

$$A^t=\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\\1&1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2(1)+0(2)+1(3) & 2(2)+0(-1)+1(0) & 2(0)+0(1)+1(0)\\ -1(1)+3(2)+1(3) & -1(2)+3(-1)+1(0) & -1(0)+3(1)+1(0)\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2+0+3 & 4+0+0 & 0+0+0\\ -1+6+3 & -2-3+0 & 0+3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4&0\\8&-5&3\end{bmatrix}$$

---

(٨) دورة ٢٠١٨ | لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\\0&2\end{pmatrix}$$

أوجد $A\cdot B$ ثم أوجد منقول المصفوفة A.

الحل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2(2)+3(1)+1(0) & 2(1)+3(3)+1(2)\\ -1(2)+0(1)+1(0) & -1(1)+0(3)+1(2)\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}4+3+0 & 2+9+2\\ -2+0+0 & -1+0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&13\\-2&1\end{pmatrix}$$

منقول المصفوفة A هو A^t نحصل عليها بإبدال الأعمدة بالأسطر أو الأسطر بالأعمدة.

$$A^t=\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\\1&1\end{pmatrix}$$

---

(٩) لدينا المصفوفتان:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

① أوجد $A\cdot B$ ثم $B\cdot A$ ② أوجد $2A-3B$ ثم $-3A+2B$

الحل: ①

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2(0)-1(1) & 2(-1)-1(2)\\ 1(0)-2(1) & 1(-1)-2(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1 & -2-2\\ 0-2 & -1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-4\\-2&-5\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0(2)-1(1) & 0(-1)-1(-2)\\ 1(2)+2(1) & 1(-1)+2(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1 & 0+2\\ 2+2 & -1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\4&-5\end{pmatrix}$$

②

$$2A-3B=\begin{pmatrix}4&-2\\2&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-3\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0 & -2-3\\ 2+3 & -4+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-5\\5&2\end{pmatrix}$$

$$-3A+2B=\begin{pmatrix}-6&3\\-3&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+0 & 3-2\\ -3+2 & 6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1\\-1&10\end{pmatrix}$$

مثال ١ محلول صفحة ١٩٠	مثال محلول صفحة ١٩٧	
مثال ٢ محلول صفحة ١٩٥	مثال محلول صفحة ١٩٧-١٩٨	
مثال محلول صفحة ١٩٦	مثال محلول صفحة ١٩٨	

ج٣ المثلثات ٤

درجة	0°	30°	45°	60°	90°	180°
راديان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

$\sin 0 = 0$	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 90^\circ = 1$	$\sin 180^\circ = 0$
$\cos 0 = 1$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 90^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$
$tg\ 0^\circ = 0$	$tg\ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$tg\ 45^\circ = 1$
$tg\ 60^\circ = \sqrt{3}$	$tg\ 90 =$ غير معرف	$tg\ 180^\circ = 0$

النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$tg(x+y) = \frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x \cdot tg\,y}$$

$$tg(x-y) = \frac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x \cdot tg\,y}$$

① اوجد النسب المثلثية للزاوية:

75°

الحل:

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45 \sin 30$$

$$\sin 75^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$

$$\cos 75^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45 \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$tg 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

الـ $cotg 75^\circ$ هو مقلوب $tg 75^\circ$

$$cotg 75^\circ = \frac{1}{tg 75^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

② اوجد النسب المثلثية للزاوية 105°

الحل: $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$$

$$\sin 105^\circ = \sin 60^\circ \cos 45 + \cos 60 \sin 45$$

$$\sin 105^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ)$$

$$\cos 105^\circ = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60 \sin 45$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$tg 105^\circ = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

$$cotg = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

(٣) اوجد النسب المثلثية للزاوية (15°).

الحل بالكتاب صفحة ٧

---

(٤) برهن صحة الدستور :

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

الحل :

$\sin 2x = \sin(x+x)$

$\sin 2x = \sin x \cos x + \cos x \sin x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

علاقات أساسية :

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad : x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi K$

$\cot x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \quad : x \neq \pi K$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad : x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi K$

$1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \quad : x \neq \pi K$

---

(٥) برهن صحة الدستور :

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

الحل :

$\cos 2x = \cos(x+x)$

$\cos 2x = \cos x \cos x - \sin x \sin x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad ⭐$

لكن :

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ومنه :

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

نعوض في ⭐ نجد :

$\cos 2x = \cos^2 x + \cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

---

(٦) برهن صحة الدستور :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

الحل :

$$\ell_1 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}$$

$\cos y \quad \cos x$

$$\ell_1 = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\ell_1 = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$ وهو المطلوب

---

(٧) برهن صحة :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

الحل :

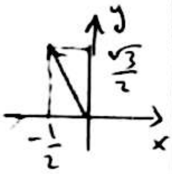
$\ell_1 = \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x)$

$$\ell_1 = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

---

(٨) اوجد النسب المثلثية للزاوية 120°

الحل : 120° هي زاوية مشهورة لذلك



$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = \dfrac{-1}{2}$

$\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$ ، $\cot 120^\circ = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

طريقة ثانية :

$\sin 120^\circ = 2\sin 60^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 120^\circ = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{-1}{2}$

$\operatorname{tg} 120^\circ = \dfrac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = -\sqrt{3}$

$\cot 120^\circ = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

⑨ بفرض $\cos x=\frac{3}{5}$ و $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

١) اوجد $\sin x$ و $tg\, x$ و $cotg\, x$

٢) اوجد $\sin 2x$, $\cos 2x$ و $tg\, 2x$

الحل: ١)

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\sin^2 x=1-\cos^2 x=\underset{25}{\frac{1}{1}}-\underset{1}{\frac{9}{25}}$

$\sin^2 x=\frac{25}{25}-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

إما $\sin x=-\frac{4}{5}$ مرفوض لأن x في الربع الأول:

أو $\sin x=+\frac{4}{5}$ مقبول لأن x في الربع الأول:

$tg\, x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

$cotg\, x=\frac{3}{4}$ ((مقلوب الـ tg))

٢)

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\sin 2x=2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\cos 2x=\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=\frac{-7}{25}$

$tg\, 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}}=\frac{-24}{7}$

⑩ بفرض $\sin x=\frac{3}{5}$ و $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

١) اوجد $\cos x$, $tg\, x$, $cotg\, x$

٢) اوجد $\sin 2x$, $\cos 2x$, $tg\, 2x$

الحل: ① بالكتاب صفحة ٦

② يتم حله كما تم حل التمرين السابق

دساتير تضعيف الزاوية:

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=2\cos^2 x-1$

$=1-2\sin^2 x$

مما سبق نجد:

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$tg^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

⑪ دورة ٢٠٠٨ ((٥٠ درجة))

إذا كانت x قياس زاوية حادة حيث $\sin x=\frac{3}{5}$ احسب كلاً من:

$\cos 2x$ و $\sin 2x$

الحل: يجب حساب $\cos x$ من العلاقة:

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{1}{1}-\frac{9}{25}$

$\cos^2 x=\frac{25}{25}-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

إما $\cos x=-\frac{4}{5}$ مرفوض لأن x حادة

أو $\cos x=+\frac{4}{5}$ مقبول لأن x حادة

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\sin 2x=2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\cos 2x=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$

(١٢) دورة ٢٠١١

اذا كان x زاوية حادة

و $\sin x = \frac{4}{5}$ فاحسب $\sin 2x$ و $\cos 2x$

الحل: يجب حساب $\cos x$ من الدستور

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \underset{25}{\frac{1}{1}} - \frac{16}{25}$

$\cos^2 x = \frac{25}{25} - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

اما $\cos x = -\frac{3}{5}$; مرفوض لأن x حادة

أو $\cos x = +\frac{3}{5}$; مقبول لأن x حادة

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\sin 2x = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$

(١٣) اذا كان x قياس زاوية حادة

$\sin x = \frac{4}{5}$ أحسب:

$\sin 2x$, $\cos 2x$, $tg 2x$

الحل: بالكتاب صفحة ٩ + ١٠

(١٤) برهن صحة:

$\sin 8x = 8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$

الحل:

$\sin 8x = 2 \sin 4x \cos 4x$

$\sin 8x = 2\left(2 \sin 2x \cos 2x\right) \cos 4x$

$\sin 8x = 4\left(2 \sin x \cos x\right) \cos 2x \cos 4x$

$\sin 8x = 8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$

(١٥) دورة ٢٠٠٥ ٦٠ درجة

آ) برهن ان:

$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$

ب) احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)^2 dx$

الحل: آ)

$\ell_1 = (\cos x - \sin x)^2$

$\ell_1 = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} \underbrace{- 2 \sin x \cos x}_{- \sin 2x}$

$\ell_1 = 1 - \sin 2x$

ب)

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x) dx$

$I = \left[x + \frac{1}{2} \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I = \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi\right] - \left[0 + \frac{1}{2} \cos 0\right]$

$I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$

(١٦) دورة ٢٠١٢

برهن صحة:

$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

الحل:

$\cos 4x = \cos 2(2x)$

$= 2 \cos^2 2x - 1$

$= 2\left[2 \cos^2 x - 1\right]^2 - 1$

$= 2\left[4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1\right] - 1$

$= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 2 - 1$

$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

وهو المطلوب.

⑰ دورة ٢٠١٥ الأولى ٤٠ درجة

إذا كان $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ وكان:

$\cos x = \frac{3}{5}$ أحسب $tg\, x$

الحل: لكن المقادير السابقة نجد:

إما $\sin x = -\frac{4}{5}$ ؛ مرفوض لأن x حادة

أو $\sin x = +\frac{4}{5}$ ؛ مقبول لأن x حادة

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

دستور هام: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

دستور هام: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

⑱ احسب النسب المثلثية للزاوية $22° 30'$

الحل:

$$x = 22° 30'$$

$$2x = 2(22° 30') = 45°$$

$$\sin^2 22° 30' = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{\frac{1}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\sin^2 22° 30' = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

مقبول $\sin 22° 30' = +\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

مرفوض $\sin 22° 30' = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos^2 22° 30' = \frac{1+\cos 45°}{2}$$

كما سبق نجد المقبول $\cos 22° 30' = +\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$tg\, 22° 30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$cotg\, 22° 30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

دساتير التحويل من مجموع إلى جداء:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

⑲ حول كلاً مما يلي إلى جداء:

$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}$$
$$= 2\sin 2x\cos x$$

$$\sin 3x - \sin x = 2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}$$
$$= 2\cos 2x\sin x$$

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}$$
$$= 2\cos 2x\cos x$$

$$\cos 3x - \cos x = -2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}$$
$$= -\sin 2x\sin x$$

⑳ برهن صحة

$$\frac{\sin 3x - \sin 2x}{\cos 3x - \cos 2x} =$$

الأول:

$$l_1 = \frac{2\cos\left(\frac{3x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-2x}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{3x-2x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-2x}{2}\right)}$$

$$l_1 = \frac{-\cos\frac{5x}{2}}{\sin\frac{5x}{2}}$$

$$l_1 = -\cot\frac{5x}{2}$$

(٢١) برهن صحة: $\underbrace{\sin 8x+\sin 2x}+\underbrace{\sin 6x+\sin 4x}=4\sin 5x\cos 2x\cos x$

الحل:

$$l_1=2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+2\sin\frac{6x+4x}{2}\cos\frac{6x-4x}{2}$$

$$l_1=2\sin 5x\cos 3x+2\sin 5x\cos x$$

$$l_1=2\sin 5x\left[\cos 3x+\cos x\right]=2\sin 5x\left[2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}\right]$$

$$l_1=4\sin 5x\cos 2x\cos x$$ وهو المطلوب.

(٢٢) دورة ٢٠١١ الإضافية أثبت أن

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin 3x-\sin x}=\operatorname{tg}2x$$

الحل:

$$l_1=\frac{-2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-3x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-3x}{2}\right)}=\frac{-\sin 2x\sin(-x)}{\cos 2x\sin x}$$

$$l_1=\frac{+\sin 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}=\operatorname{tg}2x$$ وهو المطلوب:

$\sin(-x)=-\sin x$	$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$	$\operatorname{cotg}(-x)=-\operatorname{cotg}x$	$\cos(-x)=\cos$

(٢٣) برهن أن: $\cos 70^\circ-\cos 10^\circ=-\sin 40^\circ$

الحل:

$$l_1=-2\sin\left(\frac{70^\circ+10^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{70^\circ-10^\circ}{2}\right)=-2\sin 40^\circ\cdot\sin 30^\circ$$

$$l_1=-2\left(\frac{1}{2}\right)\sin 40^\circ=-\sin 40^\circ$$

(٢٤) برهن أن: $\sin(30^\circ+x)-\sin(30^\circ-x)=\sqrt{3}\sin x$

دورة ٢٠١٦

الحل:

$$l_1=2\cos\frac{30^\circ+x+30^\circ-x}{2}\sin\frac{30^\circ+x-30^\circ+x}{2}$$

$$l_1=2\cos 30^\circ\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin x=\sqrt{3}\sin x$$ وهو المطلوب:

(٢٥) دورة ٢٠١٠ برهن أن: $\sin(60^\circ+x)-\sin(60^\circ-x)=\sin x$

الحل:

$$l_1=2\cos\frac{60+x+60-x}{2}\sin\frac{60^\circ+x-60^\circ+x}{2}$$

$$l_1=2\cos 60^\circ\sin\frac{2x}{2}=2\left(\frac{1}{2}\right)\sin x$$

$$l_1=\sin x$$ وهو المطلوب:

اكتب دساتير تحويل الجداء الى مجموع جبري :

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin y = \frac{-1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$$

---

٢٦ | دورة ٢٠٠٧ ٥٠ درجة | برهن صحة العلاقة :

$$\cos(x+60^\circ)\cdot\cos(x-60^\circ) = \frac{1}{4} - \sin^2 x$$

الحل : حسب دستور :

$$l_1 = \cos^2 x + \cos^2 60^\circ - 1 = \cos^2 x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$$l_1 = 1 - \sin^2 x + \frac{1}{4} - 1 \Rightarrow l_1 = \frac{1}{4} - \sin^2 x$$ وهو المطلوب :

طريقة ثانية :

$$l_1 = \frac{1}{2}[\cos(x+60+x-60) + \cos(x+60-x+60)]$$

$$l_1 = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos 120^\circ] = \frac{1}{2}\left[1 - 2\sin^2 x - \frac{1}{2}\right]$$

$$l_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 x\right) = \frac{1}{4} - \sin^2 x$$ وهو المطلوب :

---

٢٧ | دورة ٢٠٠٩ ٤٠ درجة | برهن صحة العلاقة

$$\sin(x+60^\circ)\cdot\sin(x-60^\circ) = \frac{1}{4} - \cos^2 x$$

الحل : حسب دستور :

$$l_1 = \sin^2 x - \sin 60^\circ = 1 - \cos^2 x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$l_1 = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} - \cos^2 x = \frac{1}{4} - \cos^2 x$$ وهو المطلوب :

---

٢٨ | دورة ٢٠١٨

$$4\sin x \cdot \sin(60^\circ+x)\sin(60^\circ-x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

برهن صحة العلاقة الحل :

$$l_1 = 4\sin x[\sin^2 60 - \sin^2 x] = 4\sin x\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2 x\right]$$

$$l_1 = 4\sin x\left[\frac{3}{4} - \sin^2 x\right] \Rightarrow l_1 = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

وهو المطلوب .

٢٩ دورة ٢٠٠٦ ٤٠ درجة

أوجد تفاضل التابع : $y=\sin 3x+\cos 2x$

الحل : دستور التفاضل : $dy=y'\cdot dx$

$$dy=(3\cos 3x-2\sin 2x)\,dx$$

---

٣٠ برهن صحة العلاقة : $\underbrace{\sin 15^\circ \sin 75^\circ}+\cos 105^\circ \cos 75^\circ=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$

الحل :

$$l_1=\frac{-1}{2}\left[\cos(75^\circ+75^\circ)-\cos(15^\circ-75^\circ)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos(105^\circ+75^\circ)+\cos(105-75^\circ)\right]$$

$$l_1=\frac{-1}{2}\left[\cos 90^\circ-\cos(-60^\circ)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos(180^\circ)+\cos 30^\circ\right]$$

$$l_1=\frac{-1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underset{1}{\frac{1}{4}}-\underset{2}{\frac{1}{2}}+\underset{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{-1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$$

---

٣١ اثبت أن : $2\sin 20^\circ \cos 10^\circ=\frac{1}{2}+\sin 10$

الحل : $2\sin 20\cos 10^\circ=\sin(20^\circ+10^\circ)+\sin(20^\circ-10^\circ)$

$2\sin 20^\circ\cos 10^\circ=\sin 30^\circ+\sin 10^\circ=\frac{1}{2}+\sin 10^\circ$ وهو المطلوب

---

٣٢ حول إلى مجموع كل مما يلي :

$$\cos 3x\cos x=\frac{1}{2}\left[\cos(3x+x)+\cos(3x-x)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos 4x+\cos 2x\right]$$

$$\sin 3x\sin x=\frac{-1}{2}\left[\cos(3x+x)-\cos(3x-x)\right]=\frac{-1}{2}\left[\cos 4x-\cos 2x\right]$$

$$\sin 3x\cos x=\frac{1}{2}\left[\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin 4x+\sin 2x\right]$$

$$\cos 3x\sin x=\frac{1}{2}\left[\sin(3x+x)-\sin(3x-x)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin 4x-\sin 2x\right]$$

---

٣٣ حل كل مما يلي : ① برهن أن

$$4\cos x\cdot\cos(120+x)\cdot\cos(120-x)=4\cos^3 x-3\cos x$$

الحل بالكتاب ـــــــ صفحة ١٥

---

٣٤ ② برهن صحة $\cos^2 x+\cos^2(60^\circ+x)+\cos^2(60^\circ-x)=\frac{3}{2}$

الحل بالكتاب ـــــ صفحة ١٥

مجموعة الفيس عليها صور الأبحاث و الوحدات اسمها ((ف ك كريم))

ملفات على قناة تلغرام اسمها منشورات كريم

م. محمد كريم - درعا - المليحة

لطلاب البكالوريا الصناعية يوجد على قناة منشورات كريم :

١- ملف ب د ف فيزياء وكيمياء صناعي كامل نظري وحلول ودورات

٢- ملف ب د ف رياضيات صناعي كامل نظري وحلول ودورات

واحلى سلام من ابن سلام وأتمنى لكم الفائدة