



SAMER ALSOSO
ELECTRONICS ENGINEER

الاشتقاق

3- ادرس قابلية الاشتقاق عند 1 للتابع التالي :

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{1-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} = \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1})}{(x-1)(\sqrt{x-1})} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x-1})} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{x-1})} = \frac{1}{(\sqrt{1-1})} = \frac{1}{0} = \infty$$

التابع غير اشتقاقي عند الواحد .

قوانين الاشتقاق :

1- مشتق العدد الثابت هو الصفر :

أمثلة : أوجد مشتق التوابع التالية :

$$1- f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$2- f(x) = \frac{-1}{3} \Rightarrow f'(x) = 0$$

2- مشتق من الدرجة الأولى هو أمثال المشتق :

$$1- f(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2$$

$$2- f(x) = \frac{-2}{7}x - 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{7}$$

$$3- f(x) = -5 - 4x \Rightarrow f'(x) = -4$$

3- مشتق تابع القوة من الدرجة n : نضرب قوة المتغير

بالعدد قبله ومن ثم نضع المتغير ومطروح من الأس

واحد أي :

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n(a)x^{n-1}$$

• **قابلية الاشتقاق:** نقول عن تابع أنه قابل للاشتقاق عند عدد ما إذا كانت النهاية التالية تساوي عدد حقيقي:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

• أمثلة :

1- ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر للتابع التالي :

$$f(x) = \sin(\sqrt{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(\sqrt{x}) - 0}{x - 0} =$$

$$= \frac{\sin(0) - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعين يتم إزالتها بتحليل المقام كما يلي :

$$x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \times \infty = \infty$$

• أصبح لدينا نهاية جداء تابعين ننهي كل تابع ومن ثم

نضرب النهايتين .

• بما أن الجواب ليس عدد حقيقي فلا يقبل الاشتقاق عند

الصفر .

• يوجد لدينا مبرهنة تنص انه إذا كان لدينا $\sin$ أي

زاوية على نفس الزاوية تكون نتيجة النهاية تساوي

الواحد عندما تكون النهاية تسعى للصفر حصرا .

• النهاية الثانية عدد على صفر فهو ∞ .

2- ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر للتابع التالي :

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \sqrt{x} = 0$$

التابع قابل للاشتقاق عند الصفر .

6- مشتق جداء تابعين :
 = مشتق الأول $\times$ الثاني + مشتق الثاني $\times$ الأول

$$f(x) = u(x) \times g(x) \Rightarrow$$

$$f(x)' = u(x)' \times g(x) + g(x)' \times u(x)$$

$$1- f(x) = x\sqrt{2x} \Rightarrow f(x)' = 1(\sqrt{2x}) + \frac{2}{2\sqrt{2x}} \times x$$

$$f(x)' = 1(\sqrt{2x}) + \frac{2x}{2\sqrt{2x}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x}} + \frac{2x}{2\sqrt{2x}} = \frac{3x}{\sqrt{2x}}$$

$$2- f(x) = (x-1)\sqrt{x}$$

$$f(x)' = 1(\sqrt{x}) + \frac{x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

7- مشتق الكسر :

$$\frac{\text{مشتق البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتق المقام} \times \text{البسط}}{\text{مشتق المقام}} =$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{g(x)}$$

$$f(x)' = \frac{u(x)' \times g(x) - g(x)' \times u(x)}{g(x)^2}$$

$$1- f(x) = \frac{2x-2}{2-x}$$

$$f(x)' = \frac{2(2-x)' - (-1)(2x-2)}{(2-x)^2} = \frac{4-2x+2x-2}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2}$$

$$2- f(x) = \frac{2x^2-3}{4x-5}$$

$$f(x)' = \frac{(4x)(4x-5) - (-4)(2x^2-3)}{(4x-5)^2}$$

$$= \frac{16x^2-20x-8x^2+12}{(4x-5)^2} = \frac{8x^2-20x+12}{(4x-5)^2}$$

8- التوابع المثلثية :

1- تابع ال sin :

$$f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow f(x)' = g(x)' \cos(g(x))$$

2- تابع ال cos :

$$f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow f(x)' = -g(x)' \sin(g(x))$$

$$1- f(x) = 2x^2 - 3 \Rightarrow f(x)' = 4x$$

$$2- f(x) = \frac{-2}{3}x^6 - 3 \Rightarrow f(x)' = \frac{-12}{3}x^5 = -4x^5$$

$$3- f(x) = -3x - 2x^3 \Rightarrow f(x)' = -3 - 6x^2$$

$$4- f(x) = x^{-3} - 2x^{-2} \Rightarrow f(x)' = -3x^{-4} + 4x^{-3}$$

يجب الانتقال إلى الأس السالب

$$5- f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \Rightarrow f(x)' = -4x^{-3} = \frac{-4}{x^3}$$

$$6- f(x) = \frac{-1}{4x^{-3}} = \frac{-x^3}{4} \Rightarrow f(x)' = \frac{-3}{4}x^2$$

4- مشتق تابع القوس من الدرجة n : نضرب قوة القوس

بالعدد قبله ومن ثم نضع القوس ومطروح من الأس
 ولعد ومن ثم نضرب بمشتق ما داخل القوس أي :

$$f(x) = a[g(x)]^n \Rightarrow$$

$$f(x)' = n(a)[g(x)]^{n-1} \times g(x)'$$

$$1- f(x) = (5x^2 - 1)^3$$

$$f(x)' = 3(5x^2 - 1)^2(10x) = 30x(5x^2 - 1)^2$$

$$2- f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^3} = (x^2+x+1)^{-3}$$

$$f(x)' = -3(x^2+x+1)^{-4}(2x+1) = \frac{-6x-3}{(x^2+x+1)^4}$$

$$3- f(x) = (x^2+x+1)^3$$

$$f(x)' = (x^2+x+1)^2(6x+3)$$

5- مشتق تابع الجذر : هو مشتق الجذر على ضمني

الجذر :

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x)' = \frac{g(x)'}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$1- f(x) = \sqrt{x^3 - 2x} \Rightarrow f(x)' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$$

$$2- f(x) = (x-1) + \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$f(x)' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x}{2x} + \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{2x + \sqrt{x}}{2x}$$

3- تابع الـ $\tan$:

$$f(x) = \tan(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))} \\ = g'(x)(1 + \tan^2(g(x)))$$

4- تابع الـ $\cot$:

$$f(x) = \cot(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sin^2(g(x))}$$

• لمبة :

• لوجد مشتق التوابع التالية :

1- $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

2- $f(x) = \sin(2x-1) \Rightarrow f'(x) = 2\cos(2x-1)$

3- $f(x) = -4\sin(\frac{1}{2}x-2) \Rightarrow$

$$f'(x) = -4\cos(\frac{1}{2}x-2) = -2\cos(\frac{1}{2}x-2)$$

4- $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$

5- $f(x) = -2\cos(4x-1) \Rightarrow$

$$f'(x) = -(-2)(4)\sin(4x-1) = 8\sin(4x-1)$$

6- $f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

7- $f(x) = \cot(3x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{\sin^2(3x)}$

• مجموعة تعريف التابع المشتق :

1- التابع الصحيح : التابع الصحيح معرف واشتقاق على

 R أي مجموعة تعريف مشتقه $]-\infty, +\infty[$

2- التابع الكسري : التابع الكسري معرف واشتقاق

على R ما عدا القيم التي تحتمل المقام أي مجموعةتعريف مشتقه $\{ \text{القيم التي تحتمل المقام} \} \setminus R$

3- التابع الجذري : التابع الجذري اشتقاق على المجال

الذي يكون فيه مضمون الجذر أكبر تماماً من الصفر

أي الأقواس إلى الخارج أي هي نفسه مجموعة تعريف

التابع لكن مع جعل الأقواس للخارج من عند الأعداد

• لوجد مجموعة التعريف التابع المشتق :

1- $f(x) = x^2 - 3$

تابع صحيح فهو معرف واشتقاق على R أي $]-\infty, +\infty[$

2- $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$

تابع كسري معرف واشتقاق على R ما عدا القيم التي تحتمل

المقام $x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow R \setminus \{3\}$

$$I =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$$

3- $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

تابع جذري فهو اشتقاق عندما يكون مضمون الجذر أكبر من

الصفر أي $x^2-1 > 0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$

$$x=1, x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$+1$	∞
$f(x)$		$+$	$-$	$+$

$$I =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

4- $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

$$x^2+4 > 0 \Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$$

مستحيلة الحل فالتابع معرف واشتقاق على R

5- $f(x) = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$

تابع صحيح فالتابع معرف واشتقاق على R

• معادلة المماس :

$$f(x) = f(x_0) + m(x-x_0)$$

• حيث m ميل معادلة المماس ويتم حسابه من المشتقالأول ومن ثم تعويض قيمة x_0 في المشتق .

• بعد حساب نختزل المعادلة إلى أبسط شكل .

• في حال كان المعطى فاصلة نقطة المماس أي x_0 نعوض قيمة x_0 في التابع فنوجد $f(x_0)$ وفي حالكان المعطى لرتيب النقطة أي $f(x_0)$ نجعل التابعيساوي هذه القيمة ونحل المعادلة لإيجاد قيمة x_0 .• نقطة المماس هي $(x_0, f(x_0))$

$$m = 3 - \frac{6(\frac{9}{4})}{2x\sqrt{\frac{9}{4}}} = 3 - \frac{6(\frac{9}{4})}{2x\frac{3}{2}} = 3 - \frac{27}{x}$$

$$m = \frac{18}{6} - \frac{27}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$f(x) = 0 + \frac{-3}{2}(x - \frac{3}{4}) \Rightarrow f(x) = \frac{-3}{2}x + \frac{27}{8}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} : \text{ليكن لدينا الخط البياني : والمطلوب :}$$

1- مجموعة التعريف.

2- مجموعة التعريف للمشتق ومشتق التابع.

3- أوجد $f'(1)$ وأوجد $f'(0)$

4- معادلة المماس في نقطة فاصمتها تساوي الصفر .

الحل :

1- مجموعة التعريف:

$$x^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

مستحيلة الحل فالتابع معرف و على R

2- مجموعة التعريف للمشتق ومشتق التابع.

بما أن التابع معرف على R وبالتالي هو اشتقاقي

على R أيضا .

$$f(x)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} : \text{المشتق :}$$

3- أوجد $f'(1)$ وأوجد $f'(0)$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 1} = 1$$

4- معادلة المماس في نقطة فاصمتها تساوي الصفر .

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 1} = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ نقطة المماس}$$

$$m = \frac{0}{\sqrt{0+1}} = 0$$

$$f(x) = 1 + 0(x - 1) \Rightarrow f(x) = 1$$

مسائل شاملة

1- ليكن لدينا الخط البياني : $f(x) = 3x - 2x\sqrt{x}$ والمطلوب :

1- مجموعة التعريف والنهائية عند أطراف المجال .

2- أثبت أن التابع اشتقاقي عند الصفر .

3- معادلة المماس للخط البياني عند النقطة $N(1, f(1))$

4- معادلة المماس في نقطة $H(x, 0)$ وتختلف عن O .

الحل :

1- التابع مؤلف من تابع صحيح وتابع جذري وبالتالي تكون مجموعة التعريف هي نفسها مجموعة تعريف الجذر وأوجدناه سابقا

$$I = [0 + \infty[$$

$$\bullet f(0) = 3(0) - 2(0)\sqrt{0} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} 3x - 2x\sqrt{x} = -2x\sqrt{x} = -\infty$$

حيث النهاية عند ∞ وبالتالي أخذنا الحد المسيطر

وأوجدنا النهاية كما تعلمنا سابقا .

$$2- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{3x - 2x\sqrt{x} - 0}{x} = \frac{x(3 - 2\sqrt{x})}{x}$$

$$3 - 2\sqrt{x} = 3 - 2\sqrt{0} = 3$$

بما أن نتيجة النهاية عند فالتابع اشتقاقي عند الصفر وقيمة

المشتق تساوي 3 .

3- معادلة المماس للخط البياني عند النقطة $N(1, f(1))$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$f(1) = 3(1) - 2(1)\sqrt{1} = 3 - 2 = 1$$

$$f(x)' = 3 - 2(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(-2x)$$

$$f(x)' = 3 - \frac{4x}{2\sqrt{x}} + \frac{-2x}{2\sqrt{x}} = 3 - \frac{6x}{2\sqrt{x}}$$

$$m = 3 - \frac{6(1)}{2\sqrt{1}} = 3 - 3 = 0$$

$$f(x) = 1 + 0(x - 1) \Rightarrow f(x) = 1$$

4- معادلة المماس في نقطة $H(x, 0)$ وتختلف عن O .

هنا معنا ترتيب النقطة لذلك نجعل التابع يساوي القيمة

المطلوبة للوجد قيمة x_0 كما يلي :

$$3x - 2x\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x(3 - 2\sqrt{x}) = 0$$

$$x = 0$$

هذا الحل مرفوض لأن النقطة مختلفة عن المبدأ O

$$3 - 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow -2\sqrt{x} = -3 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 3$$

$$4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

حيث المشتق لأوجدناه سابقا وسنعوض بقيمة x الجديدة

3- ليكن لدينا الخط البياني : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$:
والمطلوب :

- 1- أوجد مجموعة تعريف المشتق
 - 2- أوجد مجموعة تعريف المشتق وأوجد المشتق .
 - 3- معادلة المماس للخط البياني عند النقطة $N(1,0)$
- الحل :

1- أوجد مجموعة تعريف المشتق :

التابع صحيح فهو معرف على R

2- أوجد مجموعة تعريف المشتق وأوجد المشتق .

التابع صحيح فهو معرف واشتقالي على R .

المشتق : $f'(x) = 3x^2 - 6x$

3- معادلة المماس للخط البياني عند النقطة $N(1,0)$
هنا لدينا إحداثيات النقطة ولزمننا المماس فقط

$$m = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3$$

$$f(x) = 1 - 3(x + 1) \Rightarrow f(x) = -3x - 3 + 1$$

$$f(x) = -3x - 2$$

6- ليكن لدينا الخط البياني :

$f(x) = x - 2 + (x - 1)\sqrt{x - 1}$ والمطلوب :

1- اصطنع تابع h يعطى بالعلاقة :

$$h(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

2- أحسب النهاية h عند 1.

3- أحسب $f'(1)$

الحل :

1- التابع h :

$$f(1) = 1 - 2 + (1 - 1)\sqrt{1 - 1} = -1$$

$$h(x) = \frac{x - 2 + (x - 1)\sqrt{x - 1} - (-1)}{x - 1}$$

$$h(x) = \frac{x - 2 + (x - 1)\sqrt{x - 1} + 1}{x - 1}$$

$$h(x) = \frac{x - 1 + (x - 1)\sqrt{x - 1}}{x - 1} = \frac{(x - 1)(1 + \sqrt{x - 1})}{x - 1}$$

$$= 1 + \sqrt{x - 1}$$

2- أحسب النهاية h عند 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} 1 + \sqrt{x - 1} = 1$$

3- أحسب $f'(1)$: بما أن النهاية تساوي الواحد وبالتالي

$$f'(1) = 1 \text{ قيمة المشتق عند الواحد}$$

3- ليكن لدينا الخط البياني : $f(x) = 1 + 2\sqrt{x + 2}$:
والمطلوب :

1- أوجد مجموعة تعريف المشتق وأوجد المشتق .

2- معادلة المماس للخط البياني عند النقطة

$$N(-1, f(-1))$$

الحل :

1- أوجد مجموعة تعريف المشتق وأوجد المشتق :

تابع جذري فهو اشتقالي عندما يكون مضمون الجذر أكبر

من الصفر أي $x + 2 > 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2	∞
$f(x)$		$-$	$+$

$$I =] - 2, +\infty [$$

المشتق : $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

2- معادلة المماس عند النقطة $N(-1, f(-1))$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$f(-1) = 1 + 2\sqrt{-1 + 2} = 1 + 2\sqrt{1} = 3$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{-1+2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$f(x) = 3 + 1(x + 1) \Rightarrow f(x) = 3 + x + 1$$

$$f(x) = x + 4$$

4- ليكن لدينا الخط البياني : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ والمطلوب :

1- أوجد مجموعة تعريف المشتق وأوجد المشتق .

2- معادلة المماس في نقطة فاصمتها تساوي 1 .

الحل :

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow I = R \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

2- معادلة المماس في نقطة فاصمتها تساوي 1 .

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$m = \frac{-2}{1^{-3}} = -2$$

$$f(x) = 1 - 2(x - 1) \Rightarrow f(x) = 1 - 2x + 2$$

$$f(x) = -2x + 3$$

$$m = \frac{(1)^2 + 2(1) - 4}{(1+1)^2} = \frac{1+2-4}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$f(x) = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{4}(x-1)$$

$$f(x) = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{4}x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

2- هل يقبل التابع مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته :

$$y = -4x$$

حتى يقبل التابع مستقيم موازي يجب أن يكون مشتق التابع يساوي ميل المستقيم المعطى حيث يكون الميل هو أمثل X في معادلة المستقيم بعد عزلها و المعادلة معزولة وبالتالي الميل هو أمثل X أي : $m = -4$

المشتق لوجدناه سابقا وبالتالي يكون لدينا :

$$f(x)' = \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} = -4$$

$$x^2 + 2x - 4 = -4(x+1)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x - 4 = -4[x^2 + 2x + 1]$$

$$x^2 + 2x - 4 = -4x^2 - 8x - 4$$

$$x^2 + 2x - 4 + 4x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$5x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x(5x + 10) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow 5x + 10 = 0 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$$

وبالتالي يوجد مستقيمين من الممكن أن يأتي السؤال ما هو عدد المستقيمات الموازية وبالتالي يكون لدينا عدد المستقيمات بعدد قيم X .

3- هل يقبل التابع مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته :

$$3x - 2y = 0$$

هذا يجب عزل المعادلة لمعرفة ميل المستقيم كما يلي :

$$3x - 2y = 0 \Rightarrow -2y = -3x \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(x^2 + 2x - 4) = 3(x+1)^2$$

$$2x^2 + 4x - 8 = 3(x^2 + 2x + 1)$$

$$2x^2 + 4x - 8 = 3x^2 + 6x + 3$$

$$2x^2 + 4x - 8 - 3x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$-x^2 - 2x - 11 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(-1)(-11) \Rightarrow$$

$$\Delta = 4 - 4(-1)(-11) = 4 - 44 = -40$$

$$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{مستحيلة الحل}$$

وبالتالي لا يوجد ولا مستقيم

• أكتب معادلة المماس في نقطة فاصمتها الصفر للتوابع التالية:

1- $f(x) = x^3 + x^2 - 3x$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$f(0) = 0^3 + 0^2 - 3(0) = 0$$

$$f(x)' = 3x^2 + 2x - 3$$

$$m = 3(0)^2 + 2(0) - 3 = -3$$

$$f(x) = 0 - 3(x - 0) \Rightarrow f(x) = -3x$$

2- $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0$$

$$f(x)' = \frac{1(x^2+1) - (2x)(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$m = \frac{0+1}{(0^2+1)^2} = \frac{+1}{1} = 1$$

$$f(x) = 0 + 1(x - 0) \Rightarrow f(x) = x$$

3- $f(x) = \cos(x)$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$f(0) = \cos(0) = 1$$

$$f(x)' = -\sin(x)$$

$$m = -\sin(0) = 0$$

$$f(x) = 1 + 0(x - 0) \Rightarrow f(x) = 1$$

• لو كان لدينا التابع : $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$

1- أكتب معادلة المماس في نقطة فواصلها

2- هل يقبل التابع مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته :

$$y = -4x$$

3- هل يقبل التابع مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته :

$$3x - 2y = 0$$

1- أكتب معادلة المماس في نقطة فواصلها

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$f(1) = \frac{(1)^2-3(1)+1}{1+1} = \frac{1-3+1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$f(x)' = \frac{(2x-3)(x+1) - (1)(x^2-3x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f(x)' = \frac{2x^2+2x-3x-3-x^2+3x-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$

إختبار أتمة للمشتقات

1- يكون مشتق لتابع $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

$f(x)' = \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x})$	D	$f(x)' = -\frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x})$	C	$f(x)' = \frac{1}{x^2} \cos(\frac{1}{x})$	B	$f(x)' = -\frac{1}{x^2} \cos(\frac{1}{x})$	A
---	---	--	---	---	---	--	---

$$f(x) = \sin(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(x)' = -\frac{1}{x^2} \cos(\frac{1}{x})$$

2- يكون مشتق لتابع $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

$f(x)' = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$	D	$f(x)' = -2 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$	C	$f(x)' = -2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$	B	$f(x)' = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$	A
------------------------------------	---	---------------------------------------	---	---------------------------------------	---	--------------------------------------	---

$$f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow f(x)' = -2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$$

3- يكون مشتق لتابع $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})$

$f(x)' = \frac{1}{3} \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})$	D	$f(x)' = \frac{1}{3} \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})$	C	$f(x)' = -\frac{1}{3} \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})$	B	$f(x)' = 3 \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})$	A
---	---	---	---	--	---	---	---

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) \Rightarrow f(x)' = \frac{1}{3} \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})$$

4- يكون مشتق لتابع $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

$f(x)' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$	D	$f(x)' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$	C	$f(x)' = \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}}$	B	$f(x)' = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$	A
---------------------------------------	---	-------------------------------------	---	--	---	-------------------------------------	---

$$f(x) = x\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x)' = 1(\sqrt{x^2+1}) + \frac{2x(x)}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f(x)' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

5- يكون مشتق لتابع $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ المعرفة على $[0, \frac{\pi}{2}]$

$f(x)' = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$	D	$f(x)' = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$	C	$f(x)' = \frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$	B	$f(x)' = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$	A
---	---	--	---	---	---	--	---

$$f(x) = \sqrt{\cos(x)} \Rightarrow f(x)' = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$$

6- يكون مشتق لتابع $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ المعرفة على $[0, \frac{\pi}{2}]$

$f(x)' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$	D	$f(x)' = \frac{1}{\sin^2(x)}$	C	$f(x)' = \frac{-1}{\cos^2(x)}$	B	$f(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$	A
--------------------------------	---	-------------------------------	---	--------------------------------	---	-------------------------------	---

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) \Rightarrow f(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

7- يكون مشتق لتابع $f(x) = \tan(3x)$ المعرفة على $[0, \frac{\pi}{2}]$

$f(x)' = \frac{-1}{\sin^2(3x)}$	D	$f(x)' = \frac{3}{\sin^2(3x)}$	C	$f(x)' = \frac{3}{\cos^2(3x)}$	B	$f(x)' = \frac{1}{\cos^2(3x)}$	A
---------------------------------	---	--------------------------------	---	--------------------------------	---	--------------------------------	---

$$f(x) = \tan(3x) \Rightarrow f(x)' = \frac{3}{\cos^2(3x)}$$

8- يكون مشتق لتابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ المعرفة على $]0, \infty[$

$f(x)' = \frac{-\sqrt{x}}{2x}$	D	$f(x)' = \frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$	C	$f(x)' = \frac{-\sqrt{x}}{x^2}$	B	$f(x)' = \frac{\sqrt{x}}{2x^2}$	A
--------------------------------	---	----------------------------------	---	---------------------------------	---	---------------------------------	---

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \Rightarrow f(x)' = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})x - (1)(\sqrt{x})}{x^2} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{x^2} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{2\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{-\frac{x}{2\sqrt{x}}}{x^2} \Rightarrow f(x)' = \frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$$

- ليكن لدينا الخط البياني للتابع التالي $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ والمطلوب الإجابة عن الأسئلة [9 و 10] دورة ميكانيك 2024

9- يكون مشتق التابع:

$f(x)' = \frac{-5}{(x-3)^2}$	D	$f(x)' = \frac{-2x+5}{(x-3)^2}$	C	$f(x)' = \frac{4x-5}{(x-3)^2}$	B	$f(x)' = \frac{5}{(x-3)^2}$	A
------------------------------	---	---------------------------------	---	--------------------------------	---	-----------------------------	---

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3} \Rightarrow f(x)' = \frac{2(x-3)-(1)(2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x+1}{(x-3)^2} \Rightarrow f(x)' = \frac{-5}{(x-3)^2}$$

10- معادلة المماس في نقطة ترائيها -3 :

$f(x) = +5x - 7$	D	$f(x) = +5x + 7$	C	$f(x) = -5x - 7$	B	$f(x) = -5x + 7$	A
------------------	---	------------------	---	------------------	---	------------------	---

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3} \Rightarrow \frac{2x-1}{x-3} = -3 \Rightarrow 2x-1 = -3x+9 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, -3)$$

$$m = \frac{-5}{(2-3)^2} = \frac{-5}{1} = -5 \Rightarrow f(x) = -3 - 5(x-2) \Rightarrow f(x) = -3 - 5x + 10 \Rightarrow f(x) = -5x + 7$$

- ليكن لدينا الخط البياني للتابع التالي $f(x) = \frac{x}{x-1}$ والمطلوب الإجابة عن الأسئلة [11 و 12] دورة كهرباء 2024

11- معادلة المماس في نقطة فاصمتها 2 :

$f(x) = x - 4$	D	$f(x) = x + 4$	C	$f(x) = -x + 4$	B	$f(x) = -x - 4$	A
----------------	---	----------------	---	-----------------	---	-----------------	---

$$f(2) = \frac{2}{2-1} = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f(x)' = \frac{1(x-1)-(1)(x)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} \Rightarrow f(x)' = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{-1}{2-1} = \frac{-1}{1} \Rightarrow m = -1 \Rightarrow f(x) = 2 - 1(x-2) \Rightarrow f(x) = 2 - x + 2 \Rightarrow f(x) = -x + 4$$

12- يقبل التابع مستقيم موازي للمستقيم $y = -x$ وبالتالي تكون إحدى قيم X :

$x = -2$	D	$x = 2$	C	$x = 1$	B	$x = -1$	A
----------	---	---------	---	---------	---	----------	---

$$y = -x \Rightarrow m = -1 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = -1 \Rightarrow -1 = -(x-1)^2 \Rightarrow -1 = -(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow$$

$$-1 = -x^2 + 2x - 1 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

- ليكن لدينا الخط البياني للتابع التالي $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$ والمطلوب الإجابة عن الأسئلة [13 و 14] دورة ميكانيك 2024

13- معادلة المماس في نقطة فاصمتها 2 :

$f(x) = 2x - 4$	D	$f(x) = -2x - 4$	C	$f(x) = 2x + 4$	B	$f(x) = -2x + 4$	A
-----------------	---	------------------	---	-----------------	---	------------------	---

$$f(2) = \frac{2^2-2(2)}{2-1} = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1} \Rightarrow f(x)' = \frac{(2x-2)(x-1)-(1)(x^2-2x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$f(x)' = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} \Rightarrow m = \frac{(2)^2-2(2)+2}{(2-1)^2} = \frac{4-4+2}{1} \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = 0 + 2(x-2) \Rightarrow f(x) = 2x - 4$$

14- يقبل التابع مستقيم موازي للمستقيم $2x - y = 4$ وبالتالي تكون إحدى قيم X :

$x = -2$	D	$x = 2$	C	$x = 1$	B	$x = -1$	A
----------	---	---------	---	---------	---	----------	---

$$2x - y = 4 \Rightarrow y = 2x - 4 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 2(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$x = 0, x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

15- يكون مشتق التابع $f(x) = \cos(2x)$ دورة ميكانيك 2024

$f(x)' = 2 \sin(2x)$	D	$f(x)' = -2 \sin(x)$	C	$f(x)' = -\sin(2x)$	B	$f(x)' = -2 \sin(2x)$	A
----------------------	---	----------------------	---	---------------------	---	-----------------------	---

$$f(x) = \cos(2x) \Rightarrow f(x)' = -2 \sin(2x)$$

16- يكون مشتق التابع $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$ المعرفة على $[0, \frac{\pi}{4}]$

$f(x)' = \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$	D	$f(x)' = \frac{-\cos(2x)}{\sqrt{\cos(x)}}$	C	$f(x)' = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\cos(x)}}$	B	$f(x)' = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\cos(x)}}$	A
--	---	--	---	---	---	---	---

$$f(x) = \sqrt{\sin(2x)} \Rightarrow f(x)' = \frac{2\cos(2x)}{2\sqrt{\cos(x)}} \Rightarrow f(x)' = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\cos(x)}}$$

17- يكون مشتق التابع $f(x) = \sin(x)$ في نقطة فاصمتها $\frac{\pi}{2}$

$y = 2$	D	$y = 1$	C	$y = x + 1$	B	$y = x - 1$	A
---------	---	---------	---	-------------	---	-------------	---

$$f(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(x)' = \cos(x) \Rightarrow m = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow m = 0$$

$$f(x) = 1 + 0(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x) = 1$$

18- يكون مشتق التابع $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$ المعرفة على $[0, \frac{\pi}{2}]$

$f(x)' = \frac{3}{\cos^2(3x)}$	D	$f(x)' = \frac{3}{\sin^2(3x)}$	C	$f(x)' = \frac{-3}{\cos^2(3x)}$	B	$f(x)' = \frac{3}{\cos^2(x)}$	A
--------------------------------	---	--------------------------------	---	---------------------------------	---	-------------------------------	---

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \tan(3x) \Rightarrow f(x)' = \frac{3}{\cos^2(3x)}$$

19- ليكن c الخط البياني للتابع f المعرفة على $\{R\}$ وفق: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ تكون معادلة المماس في نقطة فاصمتها $x=0$ هي : دورة الامتحان القصفي 2025

$y = 2$	D	$y = -1$	C	$y = 0$	B	$y = 1$	A
---------	---	----------	---	---------	---	---------	---

$$f(0) = 0^3 + 3(0^2) + 1 = 1, \quad f(x)' = 3x^2 + 6x \Rightarrow m = 3(0)^2 + 6(0) = 0$$

$$y = 1 + 0(x - 0) \Rightarrow y = 1$$

20- ليكن c الخط البياني للتابع f المعرفة على $\{R \setminus 0\}$ وفق: $f(x) = -\frac{1}{x}$ عدد المماسات للخط c الموازية للمستقيم $y=x$ هي : دورة الامتحان القصفي 2025

4	D	3	C	2	B	1	A
---	---	---	---	---	---	---	---

$$F(x)' = m \Rightarrow F(x)' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = m \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

بما أن يوجد قيمتين لـ x وبالتالي يوجد مماسين

21- ليكن لدينا التابع f المعرفة على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = x\sqrt{x} + 1$ عند $f(1)$ يساوي : دورة الامتحان القصفي 2025

1	D	$\frac{3}{2}$	C	$\sqrt{2}$	B	0	A
---	---	---------------	---	------------	---	---	---

$$f(x)' = 1\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(1)' = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow f(1)' = \frac{3}{2}$$

22- ليكن لدينا التابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 1$ عند $f(x)$ يساوي : دورة الامتحان القصفي 2025

$f(x)' = \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$	D	$f(x)' = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2}$	C	$f(x)' = \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}$	B	$f(x)' = \frac{x\sqrt{x}-1}{x}$	A
-----------------------------------	---	----------------------------------	---	-----------------------------------	---	---------------------------------	---

$$f(x)' = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)' = \frac{-\sqrt{x}}{(\sqrt{x})x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x}(x^2)}$$

$$f(x)' = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x})x^2} \Rightarrow f(x)' = \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})x^2} \Rightarrow f(x)' = \frac{(x\sqrt{x}-1)}{x^2}$$

23- إن التابع : $f(x) = \sin(x)$ اشتقاقي عند 0 وقيمة نهاية هذا المشتق هو :

A	1	B	-1	C	0	D	2
---	---	---	----	---	---	---	---

إن قيمة النهاية لهذا المشتق يعني أن نوجد مشتق التابع ونعوض قيمة الصفر فيه

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$$

24- النهاية التالية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x^2+1}$ تساوي : دورة الامتحان النصفى 2025

A	1	B	-1	C	0	D	$-\infty$
---	---	---	----	---	---	---	-----------

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x^2+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

25- ليكن لدينا التابع f المعرفة على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = x\sqrt{x}$

A	$f'(x) = \sqrt{x}$	B	$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}}$	C	$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$	D	$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$
---	--------------------	---	-------------------------------	---	------------------------------	---	-------------------------------

$$f'(x) = 1\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$



SAMER ALSOSO
ELECTRONICS ENGINEER