



مجموعة التعريف والنهايات

$$3- f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$$

الحل : $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 1) = 0$
 $x = -3, x = 1$

$$D = R / [-3, 1]$$

$$D =] - \infty, -3[\cup] -3, 1[\cup] 1, +\infty[$$

$$4- f(x) = \frac{x}{x^2+4x+4}$$

الحل : $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$
 $x = -2$

$$D = R / [-2] \Rightarrow D =] - \infty, -2[\cup] -2, +\infty[$$

$$5- f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$$

الحل : $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$
 $x = -3, x = 3$

$$D = R / [-3, 3]$$

$$D =] - \infty, -3[\cup] -3, 3[\cup] 3, +\infty[$$

$$6- f(x) = \frac{x+1}{4x^2-1}$$

الحل : $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$
 $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$

$$D = R / [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$D =] - \infty, -\frac{1}{2}[\cup] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cup] \frac{1}{2}, +\infty[$$

$$7- f(x) = \frac{x+1}{-x^2-4}$$

الحل : $-x^2 - 4 = 0 \Rightarrow -x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = -4$

مستحيلة الحل وبالتالي التابع معرف على كل R

$$D = [R] \Rightarrow D =] - \infty, +\infty[$$

• مجموعة التعريف التابع :

1- التابع الصحيح : مجموعة التعريف التابع الصحيح هي مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة { R } ونكتب بالشكل :

$$D = [R] \Rightarrow D =] - \infty, +\infty[$$

• أمثلة : أوجد مجموع التعريف للتوابع التالية :

$$1- f(x) = x^2 + x - 3$$

الحل : $D = [R] \Rightarrow D =] - \infty, +\infty[$

$$2- f(x) = \frac{x^2+x-3}{2}$$

الحل : $D = [R] \Rightarrow D =] - \infty, +\infty[$

2- التابع الكسري : مجموعة التعريف التابع الكسري هي

مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا القيم التي تعدم المقام { R } ونكتب بالشكل :

$$D = R / [\text{القيم التي تعدم المقام}]$$

• أمثلة : أوجد مجموع التعريف للتوابع التالية :

$$1- f(x) = \frac{x^2+x-3}{x-4}$$

الحل : $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$$D = R / [4] \Rightarrow D =] - \infty, 4[\cup] 4, +\infty[$$

$$2- f(x) = \frac{x^2+x-3}{-x-5}$$

الحل : $-x - 5 = 0 \Rightarrow -x = 5 \Rightarrow x = -5$

$$D = R / [-5] \Rightarrow D =] - \infty, -5[\cup] -5, +\infty[$$

2- $f(x) = \sqrt{-5x + 15}$

الحل :

$$-5x + 15 \geq 0 \Rightarrow -5x + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$-5x = -15 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f(x)	+	0	-

$$D =]-\infty, 3]$$

3- $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$

الحل :

$$x^2 + 5x + 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(x + 1)(x + 4) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -4$$

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

$$D =]-\infty, -4] \cup [-1, +\infty[$$

4- $f(x) = \sqrt{-x^2 - 9x + 20}$

الحل :

$$-x^2 + 9x + 20 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$(x - 5)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 4$$

x	$-\infty$	4	5	$+\infty$	
f(x)	-	0	+	0	-

$$D = [4, 5]$$

5- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

الحل :

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2, x = 2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

$$D =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

6- $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

الحل :

$$x^2 + 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 = -9$$

مستحيلة الحل وبالتالي إشارة التابع من إشارة x^2 أي موجب على كل R وبالتالي مجموعة التعريف :

$$D = [R] \Rightarrow D =]-\infty, +\infty[$$

8- $f(x) = \frac{x+1}{-9x^2+36}$

حل :

$$-9x^2 + 36 = 0 \Rightarrow -9x^2 = -36$$

$$x^2 = \frac{-36}{-9} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2, x = 2$$

$$D = R / [-2, 2]$$

$$D =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$$

9- $f(x) = \frac{x}{-3x^2+6x}$

الحل :

$$-3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x(-3x + 6) = 0$$

$$x = 0, -3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$$

$$D = R / [0, 2]$$

$$D =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$$

10- $f(x) = \frac{-3x}{(2x-3)(x+2)}$

الحل :

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$D = R / [-2, \frac{3}{2}]$$

$$D =]-\infty, -2[\cup]-2, \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$$

وبالتالي لمعرفة مجموعة التعريف للتابع الكسري يجب معرفة القيم التي تعدد المقام ويتم الحل كما تعلمنا سابقاً .

● مجموعة تعريف التابع الجذري : لمعرفة مجموعة

تعريف التابع الجذري يجب دراسة إشارة ما تحت الجذر وأخذ المجال الموجب أو يساوي الصفر كما تعلمنا سابقاً .

● أمثلة : أوجد مجموع التعريف للتتابع التالية :

1- $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

الحل :

$$2x - 4 \geq 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	-	0	+

$$D = [2, +\infty[$$

حيث قمنا بدراسة إشارة المقدار كما تعلمنا سابقاً وأخذنا المجال الموجب مع الصفر والانتباه إلى الأقواس للداخل من جهة الأرقام .

• عندما تكون عند رقم : نقوم بتعويض الرقم بالتابع .

$$1- \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + x - 1 = (2)^2 + 2 - 1 = 5$$

$$2- \lim_{x \rightarrow -3} -x^2 - x + 4 = -(-3)^2 - (-3) + 4 = -(9) + 3 + 4 = -9 + 7 = -2$$

$$3- \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 4x^2 - 2x + 4 = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 4\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{2} + 4 = 6$$

$$4- \lim_{x \rightarrow -2} -x^3 + 2x + 1 = -(-2)^3 + 2(-2) + 1 = -(-8) - 4 + 1 = 8 - 3 = 5$$

2- التابع الكسري : نميز حالتين عند حساب النهاية :

1- عندما تكون النهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$: يجب معرفة قوة

كل من البسط والمقام والمقارنة بينهما حيث تكون قوة كل من البسط والمقام هي أعلى أس ونميز الحالات التالية :

1- قوة البسط أقل من قوة البسط $\Rightarrow$ النهاية تساوي الصفر

2- قوة البسط تساوي قوة المقام $\Rightarrow$ النهاية تساوي أمثال قوة البسط على أمثال قوة المقام .

3- قوة البسط أكبر من قوة البسط $\Rightarrow$ النهاية تساوي $+\infty$ أو $-\infty$ وسنشهد كيف يتم معرفة الإشارة بالأمثلة :

• أمثلة : أوجد نهايات التوابع التالية :

$$1- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x} = 0$$

حيث نلاحظ درجة البسط أكبر من درجة المقام .

$$2- \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x-3} = 0$$

$$3- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+6}}{4x-3} = 0$$

$$4- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x+2}{4x-3} = \frac{-8}{4} = -2$$

حيث نلاحظ درجة البسط تساوي درجة المقام .

$$5- \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2}x^4 + 2}{6x^4 - 3} = \frac{\frac{1}{2}}{6} = -\frac{1}{12}$$

$$6- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1x^3 + 2}{6x + 3x^3 - 3} = \frac{1}{3}$$

$$7- f(x) = \sqrt{2x^2 + x4}$$

الحل :

$$2x^2 + x4 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + x4 = 0$$

$$x(2x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 , x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f(x)		+	0	-

$$D =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$$

• نهاية التابع :

1- التابع الصحيح : نميز حالتين عند حساب النهاية :

1- عندما تكون النهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$: تكون نتيجة

النهاية إما $+\infty$ أو $-\infty$ ولمعرفة الإشارة نأخذ الحد المسيطر في التابع وهو الحد ذو أعلى قوة ونعالج إشارته حيث إذا كان الأس عدد زوجي تكون الإشارة موجبة ومن ثم نضربها بالإشارة الموجودة بالتابع أم إذا كان الأس فردي نعوض الإشارة كما هي ومن ثم تضرب بإشارة التابع لمعرفة الإشارة النهائية كما سنشهد في الأمثلة :

• أمثلة : أوجد نهايات التوابع التالية :

$$1- \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x - 1 = +(+\infty)^2 = +\infty$$

$$2- \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 3x = +(-\infty)^2 = +(+\infty) = +\infty$$

$$3- \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 6 = -(-\infty) = +\infty$$

$$4- \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 - 3x = -(+\infty)^2 = -(+\infty) = -\infty$$

$$5- \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 - x = -(-\infty)^4 = -(+\infty) = -\infty$$

$$6- \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x + 1 = +(+\infty)^3 = +(+\infty) = +\infty$$

$$7- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x + 1 = +(-\infty)^3 = +(-\infty) = -\infty$$

$$8- \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^5 - x + 1 = -(+\infty)^3 = -(+\infty) = -\infty$$

$$9- \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^5 - x = -(-\infty)^3 = -(-\infty) = +\infty$$

2- إذا كان لدينا التابع من الدرجة الثانية في المقام ندرس إشارة المقدار لمعرفة إشارة الصفر.

3- إذا كان لدينا الصفر ناتج عن جذر يكون دوما صفر موجب .

4- إذا كان الصفر ناتج من مقدار مرفوع لأس زوجي يكون صفر موجب أيضا .

بالعودة للتمرين نجد المقام من الدرجة الأولى لذلك يكون لدينا:

• النهاية من اليسار : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{0^-} = -\infty$

• النهاية من اليمين : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{0^+} = +\infty$

حيث عدد على صفر يساوي لانهاية .

4- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-1}{-2x-4} = \frac{4(2)-1}{-2(2)-1} = \frac{7}{0}$

• النهاية من اليسار : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{7}{0^+} = +\infty$

• النهاية من اليمين : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{7}{0^-} = -\infty$

5- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-1}{x^2-4} = \frac{4(2)-1}{(2)^2-1} = \frac{7}{0}$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

• النهاية من اليسار : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{7}{0^-} = -\infty$

• النهاية من اليمين : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{0^+} = +\infty$

حيث درسنا إشارة كما تعلمنا سابقا وأخذنا إشارة الصفر عند 2 من اليمين ومن اليسار حسب الإشارة .

6- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x-1}{x^2+3x+2} = \frac{4(-2)-1}{(-2)^2+3(-2)+2}$

$= \frac{-9}{4-6+2} = \frac{-9}{0} \Rightarrow (x+1)(x+2) = 0$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

• النهاية من اليسار : $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-9}{0^+} = -\infty$

• النهاية من اليمين : $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-9}{0^-} = +\infty$

حيث درسنا إشارة كما تعلمنا سابقا وأخذنا إشارة الصفر عند 2- من اليمين ومن اليسار حسب الإشارة .

7- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x-1}{3x^2-3x} = \frac{x^3}{x^2} = +x = +(+\infty) = +\infty$

حيث نلاحظ درجة البسط أكبر من درجة المقام نأخذ الحد المسيطر وإشارة كل من البسط والمقام ونختصر فنعود لحالة التابع الصحيح نعوض ونوجد الجواب.

8- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3+2x-1}{3x+2} = \frac{-x^3}{x} = -x^2 = -(+\infty)^2 = -\infty$

9- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-1}{4x} = \frac{x^4}{4x} = x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

10- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4-1}{3x^2} = \frac{-x^4}{x^2} = -x^2 = -(-\infty)^2 = -\infty$

11- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-3)(-2x+8)}{(3-4x)(2+x)} = \frac{-2x^2}{-4x^2} = \frac{1}{2}$

نلاحظ أن لدينا جذاء أقواس وبالتالي نقوم بجداء المجاهيل فقط كما هو موضح وبالتالي يكون لدينا أحد الحالات السابقة.

12- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5+3}{(x^2+1)(-2x+6)} = \frac{-x^5}{-2x^3} = +x^2 = +\infty$

13- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+4}{(x^2+1)(-2x+6)} = \frac{x}{-2x^3} = 0$

2- عندما تكون النهاية إلى عدد معين: في هذه الحالة نعوض قيمة العدد في التابع ونوجد قيمة التابع ولكن يوجد لدينا بعض الحالات يجب دراستها وبعض حالات عدم التعيين يجب التخلص منها وسنشرح ذلك لاحقا.

• حالات عدم التعيين :

$\left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty \right]$

• حالات يجب حفظها :

$\left[\frac{\text{عدد}}{0} = \infty, \frac{0}{\text{عدد}} = 0, \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0, \frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty \right]$

• أمثلة :

1- $\lim_{x \rightarrow +2} \frac{-x^3+2x-1}{-x-1} = \frac{-(2)^3+2(2)-1}{-(2)-1} = \frac{-8+4-1}{-2-1} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

2- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(-3)^3-1}{(-3)^2-1} = \frac{-27-1}{9-1} = \frac{-28}{8} = \frac{-7}{2}$

3- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(1)-1}{1-1} = \frac{2-1}{0} = \frac{1}{0}$

نلاحظ أن المقام يساوي الصفر وبالتالي يجب دراسة إشارة الصفر من اليسار ومن اليمين كما يلي :

1- إذا كان لدينا التابع من الدرجة الأولى في المقام تكون إشارة الصفر من اليسار تخالف x ومن اليمين توافق إشارة x .

$$10- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$$

حيث درجة البسط تساوي درجة المقام .

$$11- \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 1} = +\infty - \infty$$

حالة عدم تعين نضرب بالبسط والمقام بمرافق الجذر

$$= \frac{(2x - \sqrt{4x^2 + 1})(2x + \sqrt{4x^2 + 1})}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x^2 - (4x^2 + 1)}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x^2 - 4x^2 - 1}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{-1}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = 0$$

• أمثلة شاملة : أوجد مجموعة التعريف والنهية عند أطراف المجال :

$$1- f(x) = \frac{-3x^2}{(x-3)(x-1)}$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$D =] - \infty, 1[\cup] 1, 3[\cup] 3, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{(x-3)(x-1)} = \frac{-3x^2}{x^2} = -3$$

حيث قارنا بين درجة البسط ودرجة المقام كما تعلمنا سابقا وتكون النهاية عند $+\infty$ أيضا نفس النهاية في هذه الحالة فقط .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(1)^2}{(1-3)(1-1)} = \frac{-3}{0} =$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f(x)	+	0	-	+

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad \bullet \text{ النهاية من اليسار :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3}{0^-} = +\infty \quad \bullet \text{ النهاية من اليمين :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(3)^2}{(3-3)(1-1)} = \frac{-27}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-27}{0^-} = +\infty \quad \bullet \text{ النهاية من اليسار :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-27}{0^+} = -\infty \quad \bullet \text{ النهاية من اليمين :}$$

3- التابع الجذري : نميز حالتين أيضا :

1- عندما تكون النهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$: عندما يكون

لدينا جذر وحيد تكون النهاية إما $+\infty$ أو $-\infty$ حسب

إشارة الجذر أما عندما يكون لدينا أكثر من جذر يجب

دراسة الحالة كما سنشاهد بالتمارين :

2- عندما تكون النهاية عند رقم : نعوض الرقم في التابع

ونوجد القيمة كما سنشاهد أيضا .

• أمثلة :

$$1- \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 2x + 1} = +\infty$$

$$2- \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x + 1} = +\infty$$

$$3- \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{-2x + 1} = -\infty$$

$$4- \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x^3 + 2x + 1} = -\infty$$

$$5- \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 6x} = \sqrt{2^2 + 6(2)} = \sqrt{16} = 4$$

$$6- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{\sqrt{0+4}-2}{0} = \frac{\sqrt{4}-2}{0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعين نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر

ومرافق الجذر هو نثبت الحد الأول ونعكس إشارة الثاني

ويكون ناتج ضرب أي عدد بمرافقه هو مربع الأول ناقص

مربع الثاني كما يلي :

$$= \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{0+4}+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$7- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \frac{\sqrt{1}-1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$8- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+14}-1}{x} = \frac{\sqrt{2+14}-1}{2} = \frac{\sqrt{16}-1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$9- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

حيث درجة المقام أكبر من درجة البسط فالنهاية صفر

$$4- f(x) = x^2 - 5 + \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$D =] - \infty, 1[\cup] 1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5 + \frac{1}{(1-x)^2} = x^2 = +\infty$$

حيث قارنا بين درجة البسط ودرجة المقام كما تعلمنا سابقا وتكون النهاية عند $+\infty$ أيضا نفس النهاية في هذه الحالة فقط .

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5 + \frac{1}{(1-x)^2} = 1^2 - 5 + \frac{1}{(1-1)^2}$$

$$= -4 + \frac{1}{(0)^2} = -4 + \frac{1}{0^+} = -4 + \infty = +\infty$$

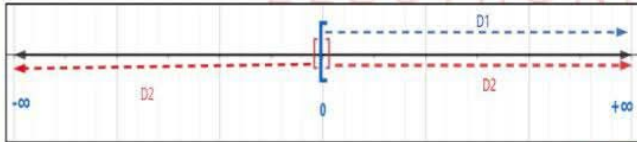
حيث لا داعي لمعرفة إشارة الصفر لأنه ناتج عن أس زوجي كما ذكرنا سابقا فهو صفر موجب ومن ثم قسمنا الإشارات وأوجدنا الناتج .

$$5- f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

نلاحظ أن التابع مؤلف من مجموع تابعين نوجد مجموعة تعريف كل تابع ومن ثم نأخذ التقاطع للمجموعتين :

$$\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{1}{x} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_2 =] - \infty, 0[\cup] 0, +\infty[$$



$$D =]0, +\infty[$$

حيث مجموعة التعريف هي اجتماع المجالين معا أي من بعد الصفر إلى $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = \sqrt{0} + \frac{1}{0} = +\infty$$

حيث نلاحظ من مجموعة التعريف أن الصفر موجب فقط لذلك لا داعي لمعرفة إشارة الصفر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = \sqrt{x} = +\infty$$

النهاية عند $+\infty$ نأخذ الحد المسيطر ونوجد النهاية كما تعلمنا سابقا

$$2- f(x) = \frac{x+1}{x^2-9} \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3, x = 3$$

$$D =] - \infty, -3[\cup] -3, 3[\cup] 3, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{-3x^2}{x^2} = 0$$

حيث قارنا بين درجة البسط ودرجة المقام كما تعلمنا سابقا وتكون النهاية عند $+\infty$ أيضا نفس النهاية في هذه الحالة فقط .

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{-2}{0} =$$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

• النهاية من اليسار :

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

• النهاية من اليمين :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{4}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4}{0^-} = -\infty$$

• النهاية من اليسار :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4}{0^+} = +\infty$$

• النهاية من اليمين :

$$3- f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2, x = 2$$

$$D =] - \infty, -2[\cup] -2, 2[\cup] 2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{x^3}{x^2} = x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{x^3}{x^2} = x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{-8+1}{0} = \frac{-7}{0}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-7}{0^+} = -\infty$$

• النهاية من اليسار :

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

• النهاية من اليمين :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{8+1}{0} = \frac{9}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{9}{0^-} = -\infty$$

• النهاية من اليسار :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{9}{0^+} = +\infty$$

• النهاية من اليمين :

$$f(0) = \frac{0+1}{\sqrt{0}-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \bullet \text{ النهاية من اليسار :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \bullet \text{ النهاية من اليمين :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} = +\infty$$

حيث درجة البسط أكبر من المقام .

$$9- f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$$

تابع كسري وتابع جذري لذلك نوجد مجال التابعين ونأخذ المجال المشترك كما يلي :

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

وبالتالي مجموعة تعريف الكسر :

$$D_1 =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

ومجموعة تعريف الجذر أوجدناه سابقا فكانت :

$$D_2 = [0, +\infty[$$

وبالتالي مجموعة تعريف التابع هي المجال الموجب فقط مع الصفر حيث الجذر لا يحوي القسم السالب :

$$D = [0, +\infty[$$

$$f(0) = \frac{0+\sqrt{0}}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x+1} = \frac{x}{x} = 1$$

• **نهاية التابع المركب :** نقصد به تركيب تابع من تابعين

حيث نقوم بتعويض تابع ضمن تابع ومن ثم نقوم بالنهاية كما سنشاهد في الأمثلة :

• $f(g(x))$ أو (fog) تعني تعويض التابع g في التابع f كما سنشاهد لاحقا .

• **أمثلة :**

1- لدينا التابع $h(x) = x^2 - x + 1$ والتابع

$f(x) = \sqrt{x}$ والمطلوب حساب النهاية عند $+\infty$

للتابع $f(h(x))$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(h(x)) = \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$$

$$6- f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$$

نلاحظ لدينا مجموع تابعين الأول صحيح والثاني جذري التابع الصحيح لا يؤثر على مجموعة التعريف بالتالي مجموعة تعريف التابع هي نفسها مجموعة الجذر وأوجدناه سابقا فهو :

$$D = [0, +\infty[$$

عند الصفر نوجد صورة التابع لأن الصفر من مجموعة التعريف كما يلي :

$$f(0) = 0^2 + \sqrt{0} - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sqrt{x} - 1 = x^2 = +\infty$$

$$7- f(x) = \frac{x^2+x+\sqrt{x}}{x^2+1}$$

تابع كسري وتابع جذري لذلك نوجد مجال التابعين ونأخذ المجال المشترك كما يلي :

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow D_1 = [R]$$

مستحيلة الحل وبالتالي مجموعة التعريف هي كما المجال وبالتالي مجموعة تعريف التابع هي نفس مجموعة تعريف الجذر وأوجدناه سابقا :

$$D = [0, +\infty[$$

$$f(0) = \frac{0^2+0+\sqrt{0}}{0^2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+\sqrt{x}}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$8- f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$

تابع كسري وتابع جذري لذلك نوجد مجال التابعين ونأخذ المجال المشترك كما يلي :

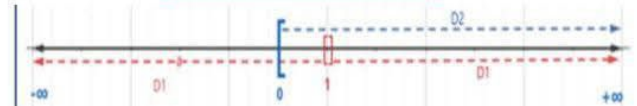
$$\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$$

وبالتالي تكون مجموعة تعريف الكسر :

$$D_1 =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

ومجموعة تعريف الجذر أوجدناه سابقا فكانت :

$$D_2 = [0, +\infty[$$



حيث نلاحظ مجموعة التعريف هي القسم الموجب ما عدا العدد واحد لأن الأقواس للخارج وبالتالي تكون مجموعة التعريف

$$D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

3- لدينا التابع $g(x) = 3x + 1$ والتابع $f(x) = \frac{1}{x}$
والمطلوب حساب النهاية عند $+\infty$ للتابع $f \circ g$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x)) = \frac{1}{3x+1} = 0$

2- لدينا التابع $g(x) = 3x - 1$ والتابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
والمطلوب حساب النهاية عند $\frac{1}{3}$ للتابع $f \circ g$.
 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{3(\frac{1}{3})-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-1}} = \frac{1}{\sqrt{0}} = +\infty$

نموذج أتمتة

الدورة الأولى كهرباء 2024

1- النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ تساوي :

+1	D	$-\infty$	C	$+\infty$	B	0	A
----	---	-----------	---	-----------	---	---	---

درجة البسط أصغر من درجة المقام $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0$

الدورة الأولى ميكانيك 2024

2- النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ تساوي :

+1	D	$-\infty$	C	$+\infty$	B	0	A
----	---	-----------	---	-----------	---	---	---

نهاية جذر بحد واحد نأخذ إشارة الجذر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 1} = +\infty$

الدورة الثانية ميكانيك 2024

3- النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ تساوي :

+1	D	$-\infty$	C	$+\infty$	B	0	A
----	---	-----------	---	-----------	---	---	---

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{x^2}{x} = +x = +(-\infty) = -\infty$

الدورة الثانية ميكانيك 2024

4- النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ تساوي :

+1	D	$-\infty$	C	$+\infty$	B	0	A
----	---	-----------	---	-----------	---	---	---

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{x^2}{x} = +x = +(+\infty) = +\infty$

الدورة الأولى ميكانيك 2024

5- النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ تساوي :

+1	D	$-\infty$	C	$+\infty$	B	0	A
----	---	-----------	---	-----------	---	---	---

نهاية جذر بحد واحد نأخذ إشارة الجذر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 1} = +\infty$

6- النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x + 1}$ تساوي :

+1	D	$-\infty$	C	$+\infty$	B	0	A
----	---	-----------	---	-----------	---	---	---

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x + 1} = \frac{x}{x} = 1$

7- مجموعة التعريف للتابع $F(x) = \frac{1}{x}$:

$] -\infty +\infty [$	D	$] -\infty 0 [$	C	R	B	$R \setminus \{0\}$	A
-----------------------	---	-----------------	---	---	---	---------------------	---

$F(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D = R \setminus \{0\} =] -\infty 0 [\cup] 0 +\infty [$

-8 النهاية $\lim_{x \rightarrow +4} x\sqrt{x}$ تساوي :

16	D	8	C	4	B	2	A
----	---	---	---	---	---	---	---

$$\lim_{x \rightarrow +4} 4\sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$$

-9 النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$ تساوي : الامتحان النصفى 2025

0	D	$\sqrt{3}$	C	3	B	$+\infty$	A
---	---	------------	---	---	---	-----------	---

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = +\infty - \infty \Rightarrow \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})} = \frac{(x+3-x)}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})} = \frac{3}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})} = 0$$

درجة البسط أقل من درجة المقام

-10 النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-1}$ تساوي : الامتحان النصفى 2025

0	D	$\sqrt{3}$	C	3	B	$+\infty$	A
---	---	------------	---	---	---	-----------	---

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-1} = 0$$

درجة البسط أقل من درجة المقام

-11 النهاية $\lim_{x \rightarrow +1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تساوي : الامتحان النصفى 2025

0	D	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{1}{4}$	B	1	A
---	---	---------------	---	---------------	---	---	---

$$\lim_{x \rightarrow +1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{\sqrt{4}-2}{1-1} = \frac{2-2}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

درجة البسط أقل من درجة المقام

-12 مجموعة التعريف للتابع $F(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$: الامتحان النصفى 2025

$R \setminus \{-1\}$	D	$\{R\}$	C	$R \setminus \{1, -1\}$	B	$R \setminus \{1\}$	A
----------------------	---	---------	---	-------------------------	---	---------------------	---

$$F(x) = \frac{2x-3}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow D = \{R\}$$

مستحيلة الحل وبالتالي مجموعة التعريف هي كل R -13 مجموعة التعريف للتابع $F(x) = \sqrt{x^2+4x-5}$: الامتحان النصفى 2025

$] -\infty -5] \cup [1 + \infty[$	D	$] -\infty -5] \cup [1 + \infty[$	C	$[-5, 1]$	B	$[-1, 5]$	A
-----------------------------------	---	-----------------------------------	---	-----------	---	-----------	---

$$F(x) = \sqrt{x^2+4x-5} \Rightarrow x^2+4x-5 \geq 0 \Rightarrow x^2+4x-5=0 \Rightarrow (x-1)(x+5)=0$$

$$\Rightarrow x = -5, x = 1$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
f(x)		+	0	-
			0	+

$$D =] -\infty -5] \cup [1 + \infty[$$

-14 النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ تساوي :

$+\infty$	D	$\sqrt{2}$	C	2	B	0	A
-----------	---	------------	---	---	---	---	---

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = +\infty - \infty \Rightarrow \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} = \frac{(x+2-x)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} = \frac{2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} = 0$$

درجة البسط أقل من درجة المقام

-15 النهاية $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1}$ تساوي :

$+\infty$	D	-1	C	0	B	$-\infty$	A
-----------	---	----	---	---	---	-----------	---

حيث النهاية من اليسار نأخذ إشارة الصفر عكس إشارة الـ X لأن المقام من الدرجة الأولى $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

-16 النهاية $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-6}{-2x+4}$ تساوي :

$+\infty$	D	-1	C	0	B	$-\infty$	A
-----------	---	----	---	---	---	-----------	---

حيث النهاية من اليمين نأخذ إشارة الصفر موافق إشارة الـ X لأن المقام من الدرجة الأولى

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-6}{-2x+4} = \frac{4-6}{-4+4} = \frac{-2}{0^-} = \infty$$

SAMER ALSOSO
ELECTRONICS ENGINEER